
DIRECCIÓN DE EDUCACIÓN ABIERTA Y A DISTANCIA Y VIRTUALIDAD

ADMINISTRACIÓN DE EMPRESAS

# MATEMATICAS APLICADAS

MÓDULO EN REVISIÓN

CECAR
Corporación Universitaria del Caribe




# MATEMATICAS APLICADAS

**CORPORACIÓN UNIVERSITARIA DEL CARIBE: CECAR**

**DIRECCION DE EDUCACION ABIERTA Y A DISTANCIA Y VIRTUALIDAD**

**PROGRAMA ADMINISTRACIÓN DE EMPRESAS PROGRAMA A DISTANCIA DE ADMINISTRACION DE EMPRESAS.**

**SINCELEJO – SUCRE**

**2014**

**TABLA DE CONTENIDO**

## SABERES

## 1 UNIDAD UNO: MATRICES

**1.1** Definición, elemento y tamaño de una matriz.

**1.2** Operaciones con matrices y sus propiedades

**1.3** Determinantes

**1.4** Regla de Cramer

**1.5** Inversa de una Matriz

**1.6** Calculo de la inversa usando la adjunta

## 2 UNIDAD DOS: SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

**2.1** Sistemas de ecuaciones mxn

**2.2** Solución de sistemas de ecuaciones lineales

**2.3** Aplicaciones: Modelo insumo producto de Leontief, Procesos de Markov y Teoría de Juegos. (Opcional)

## 3 UNIDAD TRES: LÍMITE Y CONTINUIDAD

**3.1** Definición

**3.2** Propiedades de los límites

**3.3** Limites indeterminados

**3.4** Limites al infinito y limites infinitos.

**3.5** Continuidad

## 4 UNIDAD CUATRO: TOPICOS DE CALCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

**4.1** Incrementos y tasas

**4.2** La derivada

**4.3** Derivadas de orden superior

**4.4** Aplicaciones a la Administración.

**4.5** Antiderivadas

**4.6** Calculo de la integral indefinida

**4.7** Integral definida

## 1. INTRODUCCIÓN

Matemáticas II es un módulo que pretende desarrollar una metodología de estudio que permita llevar a la práctica los planteamientos y estrategias de la Educación a Distancia y para el aprendizaje autónomo sobre algunas aplicaciones de la matemática en administración y Economía con base en la exposición clara de los conceptos fundamentales, seguidos de ejemplos ilustrativos y de la presentación de una serie de ejercicios propuestos en las actividades.

El módulo comprende cuatro unidades. La primera trata las matrices y el algebra matricial la segunda sobre los sistemas de ecuaciones lineales, métodos de solución y aplicaciones en administración y economía. La tercera el concepto y los tipos de limite de funciones reales, sus propiedades y aplicaciones para determinar la continuidad de una función, el concepto de derivada de funciones reales, las técnicas de derivación, y la aplicación en la determinación de utilidades e ingresos máximos y costos mínimos; la cuarta Antiderivada, Reglas de integración, Integral definida y Aplicaciones

Es de anotar que cada unidad está dotada con una serie de ejemplos ilustrativos, así, como de una serie de ejercicios propuestos en bloques de actividades y una auto evaluación.

La forma como se plantea el desarrollo del modulo, dotara al alumno de destreza en el manejo de conceptos y operaciones básicas indispensables para entender y manipular todo lo relacionado con la parte Matemática que toca con su formación profesional como administrador de empresas.

## 2. JUSTIFICACIÓN

Para un Administrador de empresas es fundamental desarrollar el pensamiento lógico matemático y adquirir saberes que le ayudan en la toma de decisiones, además analizar, comprender y proponer alternativas de solución a problemas de su quehacer profesional, así mismo le aporta fundamentos teóricos para cursar estudios más avanzados.
Las matemáticas proporcionan a los profesionales de las Ciencias Económicas y Administrativas, herramientas útiles en la solución de algunas situaciones problemas puesto que las Matemáticas permiten modelar situaciones propias de los ambientes económicos y administrativos.

De otro lado atendiendo a que la formación del Administrador de Empresa es integral la asignatura esta soportada en las competencias Matemáticas genéricas de los egresados de la educación superior según (Villaveces) documento del MEN. El cual manifiesta “El egresado de la educación superior debería tener, en un grado mayor que el ciudadano de la calle, la habilidad de concentrarse en las reglas mutuamente aceptadas y en el uso de los procedimientos formales que permitirían manejar muchos diferendos apelando a la estructura formal antes que al poder y la fuerza” nótese que esta estructura las dan las Matemáticas

## 3. FORMAS DE ABORDAR LA LECTURA DEL MODULO

Para que sea más provechosa su actividad de aprendizaje, se recomienda seguir las siguientes sugerencias:

1. Inicie la actividad dando una ojeada general al módulo, revisando títulos y subtítulos para ubicarse en la panorámica de la temática.
2. Realice una lectura atenta de las unidades, señalando y anotando las ideas centrales, los conceptos básicos y sus relaciones.
3. Compare los conceptos emitidos por usted en la sesión atrévete a opinar, contrastarla con la del módulo, busca puntos comunes y diferencias. re elabore las conceptualizaciones.
4. Responda a los interrogantes y acciones que se plantean en lecturas complementarias y en los recuadros que aparecen en c/u de las unidades.
5. Anote las dudas e inquietudes para llevarlas al tutor y demás compañeros en la sesión presencial.
6. Repita el ciclo para la lectura de cada una de las unidades.

## 4. PROPÓSITOS DE FORMACIÓN

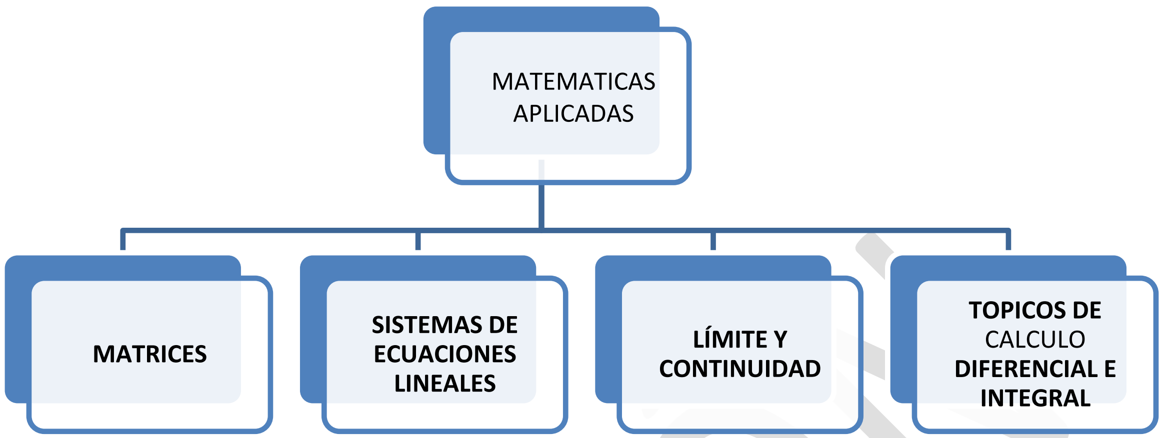
Al final del curso el alumno será capaz de entender, interpretar y aplicar los conceptos básicos del álgebra lineal, y del cálculo diferencial a un contexto específico, en materias que cursará posteriormente y en su práctica profesional, a través del análisis crítico en la solución de problemas que involucren matrices, sistemas de ecuaciones lineales, razón de cambio, derivadas y optimización.

## 5. REFERENTE TEÓRICO

El Ministerio de Educación Nacional en su documento serie lineamientos curriculares (1998) en cumplimiento del artículo 78 de la Ley 115 de 1994 consideran que las matemáticas en la escuela tienen un papel esencialmente instrumental, que por una parte se refleja en el desarrollo de habilidades y destrezas para resolver problemas de la vida práctica, para usar ágilmente el lenguaje simbólico, los procedimientos y algoritmos y, por otra, en el desarrollo del pensamiento lógico-formal.

No obstante  El profesional de Administración de Empresas debe estar preparado para desenvolverse en  empresas modernas que  demandan trabajadores capaces de realizar tres tipos de tareas: identificación de problemas, solución de problemas y definición de estrategias además de que el mercado internacional y la globalización exige debe hacer énfasis en la mercadotecnia y los negocios en los cuales se aplican métodos cuantitativos y cualitativos por lo cual existe una necesaria y permanente renovación didáctica de las Matemáticas.

## 6. ESTRUCTURA DEL MODULO MATEMATICAS APLICADAS



## 7. COMPETECIAS TRANSVERSALES A DESARROLLAR

**COMPETENCIAS DE RAZONAMIENTO CUANTITATIVO.**

**Competencias del Saber**

- Comprende los conceptos básicos de las matemáticas para analizar, modelar y resolver problemas aplicando métodos y procedimientos cuantitativos y esquemáticos. .

- Comprende los procesos relacionados con la identificación del problema y la construcción/proposición de estrategias adecuadas para su solución en la situación presentada; además del tratamiento de datos, la modelación y el uso de herramientas cuantitativas (aritméticas, métricas, geométricas, algebraicas elementales y de probabilidad y estadística).

**Competencias del Saber Hacer**

- Selecciona la información relevante y establece relaciones entre variables en la solución (el análisis) de un problema.
- Realiza cálculos sencillos para la ejecución de un plan de solución de un problema. .
- Aplica estrategias cuantitativas orientadas a validar, corregir, o descartar soluciones obtenidas a problemas propuestos.

**COMPETENCIAS DE LECTURA CRÍTICA**

**Competencias del Saber**

- Comprende el texto como un todo y la construcción del sentido global a partir de la interpretación de sus componentes implícitos y explícitos.

**Competencias del Saber Hacer**

- Identifica las relaciones entre distintas partes de los textos. Las relaciones pueden ser de implicación, inclusión, pertenencia, causalidad, orden, ejemplificación, categorización, equivalencia, complementariedad, oposición, contradicción y/o contraste, analogía o contra argumentación.

**Competencias del Saber Ser**

- Toma distancia del texto y rastrear las concepciones de mundo subyacentes, mediante la identificación de las estrategias discursivas utilizadas y el reconocimiento del rol de quienes participan en la materialización de los discursos. Evalúa desempeños como:

**COMPETENCIAS EN TECNOLOGÍAS DE LA INFORMACIÓN Y LA COMUNICACIÓN TIC:**

**Competencias del Saber:**

- Conoce criterios de búsqueda sencilla y avanzada para hacer consultas en bases de datos especializadas.

**Competencias del Saber Hacer:**

- Busca, selecciona y organiza de manera eficiente información proveniente de diversas fuentes de información.

**Competencias del Ser:**

- Valora la importancia de las Tecnologías de la Información y la comunicación como un medio para facilitar su trabajo en diversos contextos.

## UNIDAD 1

### PRESENTACIÓN

En esta unidad trataremos conceptos, operaciones y aplicaciones de uno de los métodos más recientes de las matemáticas aplicadas, como son los métodos matriciales.

Las matrices proporcionan una serie de ventajas notacionales y analíticas que nos permiten la formulación y análisis de problemas que quedarían fuera de nuestro alcance debido a la complejidad natural de la notación algebraica convencional.

**NOMBRE: MATRICES**

**PREGUNTA PROBLEMA**

¿Cuál es el contenido de una matriz y Cómo crees que las matrices se aplican a situaciones de tu contexto?

**COMPETENCIAS ESPECÍFICAS**

- ❖ Enuncia correctamente el concepto de matriz.
- ❖ Reconoce los diferentes tipos de matrices
- ❖ Determina la inversa de una matriz invertible.
- ❖ Describe Algunas situaciones o problemas de administración y economía mediante modelos matemáticos, con el uso de las matrices

**SABERES**

1. **MATRICES**

   **1.1** Definición, elemento y tamaño de una matriz.

   **1.2** Operaciones con matrices y sus propiedades

   **1.3** Determinantes

   **1.4** Regla de Cramer

   **1.5** Inversa de una Matriz

   **1.6** Calculo de la inversa usando la adjunta

## DINÁMICA PARA CONSTRUIR EL CONOCIMIENTO

### ACTIVIDAD PREVIA (Trabajo Individual)

1. La librería SINCELEJO, registra sus ventas mensuales de libros para el primer trimestre de actividades de la siguiente manera:

   **Libros de literatura**

   | | |
   |---|---|
   | Enero | 78 |
   | Febrero | 104 |
   | Marzo | 68 |

   **Libros científicos**

   | | |
   |---|---|
   | Enero | 45 |
   | Febrero | 97 |
   | Marzo | 105 |

   **Libros escolares**

   | | |
   |---|---|
   | Enero | 278 |
   | Febrero | 124 |
   | Marzo | 38 |

   **Otros libros**

   | | |
   |---|---|
   | Enero | 75 |
   | Febrero | 67 |
   | Marzo | 115 |

   Representa esta información mediante una matriz.

2. Construye una matriz supuesta para las ventas del segundo trimestre y úsala para determinarla matriz de ventas del primer semestre.

3. Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ calcula su determinante.

4. Determina cuales de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuales falsas

   a. Las matrices cuadradas tienen el mismo número de filas que de columnas. ________
   b. El producto de matrices siempre es posible.__________
   c. Dos matrices son iguales si tienen igual tamaño.________
   d. El determinante de una matriz es único. ________
   e. Un sistema de ecuaciones lineales puede ser representado mediante producto de matrices.________

f. Toda matriz tiene inversa multiplicativa.________

g. La suma de dos matrices es posible solo si tienen el mismo tamaño.________

h. El producto de matrices es conmutativo._________

i. La suma de matrices es conmutativa._________

j. Toda matriz es igual a su transpuesta._________

k. Toda matriz es simétrica._________

l. Si el determinante de una matriz es cero, es invertible.________

m. El producto de una matriz por un escalar, es un escalar________

n. Las matrices resumen la información suministrada en una tabla de doble entrada________

o. La matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ es invertible, es decir, tiene inversa multiplicativa.________

**ACTIVIDAD GRUPAL**

1. Reunidos en CIPAS, lea nuevamente la unidad 1.
2. Socialicen los resúmenes elaborados de manera individual e independiente.
3. Socialicen las respuestas de las actividades, que respondieron de manera individual.
4. Desarrollen los ejercicios que se encuentra al final de la Unidad 1 y discútanlos en el grupo de estudios. Estos ejercicios deben ser socializados en la sesión junto con todos los compañeros de grupo y entregados al tutor.

**SABERES Y ACTIVIDADES**

## 1. MATRICES

### 1.1 DEFINICION

“Una matriz es un arreglo rectangular de números reales, encerrados en paréntesis rectangulares.

Las matrices se acostumbra se denotan con letras mayúsculas como **A, B, C, D,** etc.

$$\mathbf{A} = [a_{i\,j}]_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ : & : & : & : & : \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}_{mxn}$$

Los números que forman el arreglo se denominan elementos de entrada de la matriz.

Los elementos ubicados en forma horizontal forman una fila o renglón y los ubicados en forma vertical forman una columna.”[1]

En la matriz **A**, la primera fila está compuesta por los elementos

$\mathbf{A_{1.}} = [a_{11}\ \ a_{12}\ \ a_{13}\ \dots\ \ a_{1n}]$ y la primera columna por los elementos

$$\mathbf{A_{.1}} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ : \\ . \\ a_{m1} \end{bmatrix}$$

[1] WEBER,Jean. Matemáticas para Administración y Economía. México: Ed. Harla 1982, p. 620

Si una matriz tiene **m** filas y **n** columnas, se dice que es de tamaño **m** x **n.**

Generalmente se usa la notación con doble subíndice para los elementos, con el fin de dar la ubicación exacta de estos en la matriz.

Por ejemplo, $\mathbf{a_{ij}}$ identifica al elemento de la matriz **A** que está en la fila **i** y en la columna **j**. Asimismo, denotaremos por $\mathbf{A_{i.}}$ la fila **i** y por $\mathbf{A_{.j}}$ la columna **j** de la matriz **A**.

<u>**Ejemplo**</u> La matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -5 & 4 \\ -3 & 1 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

- Es una matriz de tamaño 3 x 4. (Está compuesta por 3 filas y 4 columnas)
- $\mathbf{A_{2.}}$ = [3, 2, -5, 4]
- $\mathbf{A_{.3}} = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix}$
- $\mathbf{a}_{12}$ = -2 (Elemento que está en la primera fila, segunda columna)
- $\mathbf{a}_{34}$ = 9 (Elemento que está en la tercera fila, cuarta columna)

## 1.2 ALGUNOS TIPOS DE MATRICES.

A continuación conocerás algunos tipos de matrices, su definición y ejemplos.

**MATRIZ CUADRADA:** Es una matriz que tiene el mismo número de renglones (filas) que de columnas, es decir, es de tamaño **n** x **n**. Se le denomina matriz cuadrada de orden n.

<u>**Ejemplo**</u> Son matrices cuadradas

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \\ -3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 8 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & -3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Matriz de orden 2 Matriz de orden 3 Matriz de orden 4

En una matriz cuadrada **A** = $[a_{ij}]$ los elementos $a_{ij}$, donde i = j, se denominan elementos sobre la diagonal de **A**.

Los elementos sobre la diagonal de **A** son (3 y 4)

Los elementos sobre la diagonal de **B** son (1,1 y 5)

Los elementos sobre la diagonal de **C** son (1, 2, 4, y 4)

**MATRIZ NULA**: Es la que tiene todos sus elementos iguales a cero. Se denota por **O**

**<u>Ejemplo</u>** Son matrices nulas:

$$\mathbf{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

**MATRIZ IDENTIDAD:** Es una matriz cuadrada que tiene todos los elementos de la diagonal iguales a **1** y los demás iguales a 0. También se le llama matriz idéntica.

**<u>Ejemplo</u>** Son matrices idénticas o identidad:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**MATRICES IGUALES**: Dos matrices $\mathbf{A}_{\mathbf{mxn}}$ y $\mathbf{B}_{\mathbf{mxn}}$ son iguales si cada elemento de **A** es igual al correspondiente de **B**, es decir, $a_{ij} = b_{ij}$

**<u>Ejemplo</u>** Las matrices.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ -1 & -2 & 9 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & x & 5 \\ -1 & -2 & z \end{bmatrix}$$

Son iguales sí x = 4 y z = 9

**MATRIZ TRANSPUESTA**: La transpuesta de una matriz $\mathbf{A}_{mxn}$, es la matriz que se obtiene al intercambiar las filas y las columnas de **A**. Se denota como $\mathbf{A'}_{nxm}$

**Elemplo**

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}_{3x2} \qquad \mathbf{A'} = \begin{bmatrix} 5 & 3 & -2 \\ -6 & 1 & 4 \end{bmatrix}_{2x3}$$

**MATRIZ SIMETRICA**: Una matriz cuadrada **A** es simétrica si se cumple que **A=A'**

**Ejemplo:** La matriz **A** = $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & 5 & 1 \\ -3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ es simétrica

**MATRIZ DIAGONAL**: Es una matriz cuadrada en la que todos los elementos no diagonales son iguales a cero (o).

**Ejemplo** La matriz **A** = $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ es una matriz diagonal

**MATRIZ ESCALAR**: Es una matriz diagonal que tiene todos sus elementos diagonales iguales:

**Ejemplo** La matriz **B** = $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ es una matriz escalar

**MATRIZ TRIANGULAR SUPERIOR:** Es una matriz cuadrada en la que todos los elementos por debajo de la diagonal son ceros.

**<u>Ejemplo</u>** La matriz **C =** $\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ Es triangular superior

**MATRIZ TRIANGULAR INFERIOR:** Es una matriz cuadrada en la que todos los elementos por encima de la diagonal son ceros.

**<u>Ejemplo</u>** La matriz **D =** $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 5 & -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ es diagonal inferior

**VECTOR FILA:** Es una matriz de tamaño 1 x n

**VECTOR COLUMNA:** Es una matriz de tamaño m x 1

**<u>Ejemplo</u>**

**A =**$[a_{11} \quad a_{12} \quad a_{13} \quad \ldots \quad a_{1n}]_{1 \times n}$ Vector fila, **B =** $\begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ : \\ : \\ b_{m1} \end{bmatrix}$ Vector columna

## 1.3 OPERACIONES CON MATRICES

En esta sección se definen e ilustran la adición y sustracción de matrices, la multiplicación de una matriz por un escalar y la multiplicación de matrices entre sí.

Como una matriz es una disposición de números reales, en lugar de uno solo, algunas propiedades de las operaciones análogas para números reales no son aplicables con matrices.

### *1.3.1 ADICION Y SUSTRACION DE MATRICES*

"La suma o diferencia de dos matrices **m** x **n** es otra matriz **m** x **n** cuyos elementos son las sumas o diferencias de los elementos correspondientes de las matrices originales. Es decir, sí **A =** $[a_{ij}]$ y **B =** $[b_{ij}]$ Son dos matrices del mismo tamaño, entonces:

$$\mathbf{A + B} = [a_{ij} + b_{ij}] \quad \text{y} \quad \mathbf{A - B} = [a_{ij} - b_{ij}]$$"[2]

**Ejemplo** Dadas las matrices

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 5 \\ \frac{4}{3} & 5 & 3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -3 & -1/2 & 4 \\ 0 & 5 & -2 \end{bmatrix}$$

Hallar i) **A** + **B** ii) **A** - **B** iii) **B** - **A**

**Solución**

i) $$\mathbf{A + B} = \begin{bmatrix} 4+(-3) & (-2)+(-\frac{1}{2}) & 5+4 \\ \frac{4}{3}+0 & 5+5 & 3+(-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{5}{2} & 9 \\ \frac{4}{3} & 10 & 1 \end{bmatrix}$$

ii) $$\mathbf{A - B} = \begin{bmatrix} 4-(-3) & -2-(-\frac{1}{2}) & 5-4 \\ \frac{4}{3}-0 & 5-5 & 3-(-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -\frac{3}{2} & 1 \\ \frac{4}{3} & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

iii) $$\mathbf{B - A} = \begin{bmatrix} -3-4 & -\frac{1}{2}-(-2) & 4-5 \\ 0-\frac{4}{3} & 5-5 & -2-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & \frac{3}{2} & -1 \\ -\frac{4}{3} & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

**Ejemplo**

[2] BUDNICK, Frank. Matemáticas para Admón. Economía y Ciencias Sociales. México: McGrawHill 1995, P. 171.

$$\begin{bmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 4 & -5 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 5 & -2 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 & 4 & 2 \\ 5 & -2 & 1 \\ 6 & 8 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5+2-(-3) & -2+3-4 & 3+4-2 \\ 4+(-1)-5 & (-5)+5-(-2) & 0+(-2)-1 \\ 1+4-6 & 2+3-8 & 1+1-5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 10 & -3 & 5 \\ -2 & 2 & -3 \\ -1 & -3 & -3 \end{bmatrix}$$

Complementar con el siguiente sitio web

http://www.youtube.com/watch?v=wDdYQY_blE4

## 1.3.2 MULTIPLICACION DE UNA MATRIZ POR UN ESCALAR

"Consiste en la operación de multiplicar una matriz por un número real, lo que equivale a multiplicar cada elemento de la matriz por dicho número. Es decir, sí **A** = $[a_{ij}]$ es una matriz mxn y **k** es un escalar, entonces **k A** = $[k\ a_{ij}]$."[3]

**<u>Ejemplo</u>**

Sí **A =** $\begin{bmatrix} 4 & -3 & 5/3 & 1 \\ -5 & 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

Se tiene que 3 A = 3* $\begin{bmatrix} 4 & -3 & 5/3 & 1 \\ -5 & 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3(4) & 3(-3) & 3(5/3) & 3(1) \\ 3(-5) & 3(2) & 3(0) & 3(4) \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 12 & -9 & 5 & 3 \\ -15 & 6 & 0 & 12 \end{bmatrix}$$

**<u>Ejemplo</u>** Una ensambladora ensambla tres modelos de autos en tres colores diferentes. La capacidad de producción (en cientos) de la planta de Bogotá está dada por la matriz **A** y la de la planta de Medellín por la matriz **B.**

[3] BUDNICK, Frank. Matemáticas para Admón. Economía y Ciencias Sociales. México: McGrawHill 1995, P. 173.

$$\begin{array}{l} \\ Amarillo \\ Rojo \\ Lila \end{array}\begin{bmatrix} Modelo\ I & Modelo\ II & Modelo\ III \\ 3 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} = A$$

$$\begin{array}{l} \\ Amarillo \\ Rojo \\ Lila \end{array}\begin{bmatrix} Modelo\ I & Modelo\ II & Modelo\ III \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} = B$$

a) ¿Cuál es la capacidad total de producción en las dos plantas?

b) ¿Cuál será la nueva producción en la planta de Medellín sí se decide disminuirla en un 40%?

**<u>Solución:</u>**

a) La producción combinada (en cientos) en las dos plantas está dada por la suma de las matrices **A y B**. Esto es:

$$\begin{array}{l} \\ Amarillo \\ Rojo \\ Lila \end{array}\begin{bmatrix} Modelo\ I & Modelo\ II & Modelo\ III \\ 5 & 7 & 8 \\ 7 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 2 \end{bmatrix} = A + B$$

Observe que las dos plantas en total ensamblan 500 autos modelo **I** de color amarillo, 400 autos modelo **II** de color rojo, 200 autos modelo **III** de color lila, etc.

b) Si la producción en Medellín se disminuye en un 40% la nueva producción (en cientos) está dada por la matriz **B - 0,4B = 0,6B,** así:

$$\mathbf{0{,}6B = 0{,}6}\begin{bmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}2 & 3 & 2{,}4 \\ 1{,}8 & 0{,}6 & 1{,}8 \\ 2{,}4 & 0{,}6 & 1{,}2 \end{bmatrix}$$

En consecuencia, se ensambla en la planta de Medellín 180 autos modelo **I** color rojo, 60 autos modelos **II** color lila, etc.

**Nota:** Las matrices del ejemplo se denominan matrices de producción

Complementar con el siguiente sitio web

http://www.youtube.com/watch?v=QOHguc4QvL8

## 1.3.3 MULTIPLICACION DE MATRICES

**A**ntes de definir el producto entre dos matrices, definamos el producto de una fila por una columna.

**Definición:** El producto de una fila **A i.** = $\begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \end{bmatrix}$ por una columna

**A.j** = $\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix}$ está dado por:

$$\mathbf{A_{i.} \times A_{.j} = (a_{ij} \times a_{1j}) + (a_{i2} \times a_{2j}) + \dots + (a_{in} \times a_{nj}) =} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{kj}$$

**Ejemplo** Dada la matriz **A =** $\begin{bmatrix} -2 & 5 & 4 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix}$ se tiene que:

**A₁. A.₂** = $\begin{bmatrix} -2 & 5 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}$ = (-2) (5) + (5) (3) + (4) (-4) = -10 + 15 -16 = -11

**A₃. A.₁ =** $\begin{bmatrix} 2 & -4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ **=** (2) (-2) + (-4) (1) + (3) (2) = - 4 - 4 + 6 = -2

Observe que el producto de una fila por una columna solo es posible cuando tienen igual número de elementos, y a demás que el resultado obtenido es siempre un escalar (número real).

**DEFINICION:** Dadas dos matrices $\mathbf{A = (a_{ij})}$ de tamaño **mxn** y $\mathbf{B = (b_{jk})}$ de tamaño **nxp**, se define el producto **AB** como una matriz $\mathbf{C = (c_{ik})}$ de tamaño **mxp**, donde cada $\mathbf{C_{ik} = A_{i}.\ B_{.k}}$ (producto de la **i** - ésima fila de **A** Por la **k** - ésima columna de **B**)

*<u>Nótese que para que el producto **AB** sea posible se requiere que el número de columnas de **A** sea igual al número de filas de **B.**</u>*

**<u>Ejemplo</u>** Dadas las matrices

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 4 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 8 & -4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Hallar: a) **AB** b) **BA**

**<u>Solución:</u>**

a) Como el número de Columnas de **A** es igual al número de filas de **B**, el producto **AB** se puede realizar. Para esto, se calcula cada uno de los elementos de la matriz producto, que será de tamaño 3x2

$\mathbf{C_{11}} = \mathbf{A_1.\ B_{.1}} =$ (5) (8) + (-2) (2) = 40 - 4 = **36**

$\mathbf{C_{12} = A_1.\ B_{.2} =}$ (5) (-4) + (-2) (3) = -20 - 6 = **-26**

$\mathbf{C_{21} = A_2.\ B_{.1} =}$ (4) (8) + (3) (2) = 32 + 6 = **38**

$\mathbf{C_{22} = A_2.\ B_{.2} =}$ (4) (-4) + (3) (3) = -16 + 9 = **-7**

$\mathbf{C_{31} = A_3.\ B_{.1} =}$ (0) (8) + (1) (2) = 0 + 2 = **2**

$\mathbf{C_{32} = A_3.\ B_{.2} =}$ (0) (-4) + (1) (3) = 0 + 3 = **3**

Luego**,** $\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 36 & -26 \\ 38 & -7 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

b) Dado que el número de columnas de la matriz **B** (DOS) no es igual al número de filas de la matriz **A** (TRES), el producto **BA** no es posible.

**<u>Ejemplo</u>** Dada la matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$ calcular $\mathbf{A^2}$

**Solución**

$$\mathbf{A^2 = AA} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2)(2)+(4)(5) & (2)(4)+(4)(-3) \\ (5)(2)+(-3)(5) & (5)(4)+(-3)(-3) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 24 & -4 \\ -5 & 29 \end{bmatrix}$$

Complementar con el siguiente sitio web

http://www.youtube.com/watch?v=pmZkO5-S6xY

**Ejemplo** Un almacén de muebles tiene en sus bodegas 8 juegos de sala, 12 juegos de comedor y 5 juegos de alcoba. Los juegos de sala se venden a \$1.120.000 cada uno, los de comedor a \$950.000 cada uno y los juegos de alcoba se venden a \$1.760.000 cada uno. Expresa el precio de venta total de la existencia de muebles en bodega como el producto de dos matrices.

**Solución:**

$$\text{Precio de venta total} = \begin{bmatrix} 1.120.000 & 950.000 & 1.760.000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 12 \\ 5 \end{bmatrix} = 29.160.000$$

**Ejemplo:** Dadas las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ -2 & 4 & 5 & 0 \\ 6 & -5 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Calcular: a) 2B -3 A b) $A^2$ c) A x B

**Solución**:

$$\text{a) } 2A - 3B = 2\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ -2 & 4 & 5 & 0 \\ 6 & -5 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 & 6 \\ -4 & 8 & 10 & 0 \\ 12 & -10 & 8 & 2 \\ 2 & 6 & 4 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 & 6 & 3 & 9 \\ 9 & -6 & 0 & 6 \\ -3 & 3 & 3 & -9 \\ 0 & 6 & 3 & -3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & -2 & -5 & -3 \\ -13 & 14 & 10 & -6 \\ 15 & -13 & 5 & 11 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

b) $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ -2 & 4 & 5 & 0 \\ 6 & -5 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ -12 & 4 & 5 & 0 \\ 6 & -5 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 24 & 11 & -7 \\ 20 & -13 & 42 & -1 \\ 41 & -25 & -13 & 21 \\ 6 & 1 & 20 & 6 \end{bmatrix}$

c) $AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ -2 & 4 & 5 & 0 \\ 6 & -5 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} -1+6+1+0 & 2-4-1+6 & 1+0-1+3 & 3+4+3-3 \\ 2+12-5+0 & -4-8+5+0 & -2+0+5+0 & -6+8-15+0 \\ -6-15-4+0 & 12+10+4+2 & 6+0+4+1 & 18-10-12-1 \\ -1+9-2+0 & 2-6+2-2 & 1+0+2-1 & 3+6-6+1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6 & 3 & 3 & 7 \\ 9 & -7 & 3 & -13 \\ -25 & 28 & 11 & -5 \\ 6 & -4 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

**<u>Ejemplo</u>:** Un fabricante de relojes los produce de pilas y automáticos para damas y caballeros. La capacidad de producción (en miles) en la planta I está dada por la matriz A y la de la planta II por la matriz B.

$$A = \begin{array}{r} \\ \text{De pilas} \\ \text{Automáticos} \end{array} \begin{bmatrix} \textit{Caballeros} & \textit{Damas} \\ 8 & 5 \\ 9 & 10 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{array}{r} \\ \text{De pilas} \\ \text{Automáticos} \end{array} \begin{bmatrix} \textit{Caballeros} & \textit{Damas} \\ 12 & 15 \\ 9 & 8 \end{bmatrix}$$

a) Determine la representación matricial de la producción total de cada tipo de reloj en ambas plantas.

b) Si la producción de la planta I se incrementa en un 50% y la de la planta II se disminuye en un 20%, encuentre la matriz que representa la nueva producción total de relojes.

**<u>Solución:</u>** La producción total de cada tipo de reloj en ambas plantas está dada por la matriz A + B.

$$A + B = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 9 & 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 12 & 15 \\ 9 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & 20 \\ 18 & 18 \end{bmatrix}$$

Como la producción de la planta I se incrementa en un 50%, la nueva producción de esta planta está dada por **1,5A.** La nueva producción de la planta II está dada por **0,8B**; debido a que disminuye en un 20%.

Así, la nueva producción total de las dos plantas es:

$$1{,}5A + 0{,}8B = \begin{bmatrix} 12 & 7.5 \\ 13.5 & 15 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9.6 & 12 \\ 7.2 & 6.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21.6 & 19.5 \\ 20.7 & 21.4 \end{bmatrix}$$

Esto significa que se producen en total 21.600 relojes de pilas y 20.700 automáticos para hombres, 19.500 relojes de pilas y 21.400 automáticos para mujeres.

Complementar con el siguiente sitio web y resolver la sección de ejercicios:

http://www.vitutor.com/algebra/matrices/operaciones.html#



## 1.4 DETERMINANTES

"El determinante de una matriz cuadrada es un escalar obtenido a partir de los elementos de la matriz por operaciones especificadas"[4]. Se denota por barras verticales. Por ejemplo, si **A** = $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$ entonces su determinante se denota por

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}.$$

El determinante de una matriz de tamaño **nxn**, se dice que es un determinante de orden **n**.

[4] WEBER,Jean. Matemáticas para Administración y Economía. México: Ed. Harla 1982, p. 648

**DEFINICIÓN:** Un determinante de orden dos se define como

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \mathbf{a_1\, b_2 - a_2\, b_1}$$

**<u>Ejemplo</u>**: Evalué los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}$

**<u>Solución:</u>**

a) $\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$ = (4)(2)-(3)(-1) = 8 + 3 = 11

b) $\begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}$ = (0)(-2) - (5)(-4) = 0 + 20 = 20

**DEFINICION:** Un determinante de orden 3 está definido por:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = (a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2) - (a_3b_2c_1 + a_2b_1c_3 + a_1b_3c_2)$$

**<u>Ejemplo:</u>** Calcule el determinante $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 8 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 6 \end{vmatrix}$

**<u>Solución:</u>**

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 8 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 6 \end{vmatrix} = \left[(2)(4)(6)+(8)(-1)(5)+(0)(3)(1)\right] - \left[(5)(4)(0)+(3)(8)(6)+(2)(-1)(1)\right]$$

$$= \left[48 - \quad 40 + \quad 0\right] - \left[0 + \quad 144 - \quad 2\right] = (8) - (142) = -134$$

Observe que el desarrollo completo del determinante consta de 6 términos, cada uno de los cuales es el producto de tres elementos del determinante.

Otro procedimiento para obtener un determinante de tercer orden consiste en agregar las dos primeras columnas a la derecha y trazar diagonales que contengan tres elementos. El determinante está dado por la suma de los productos de las diagonales principales (derechas) menos la suma de los productos de las otras diagonales (izquierdas)  (ley de sarruss).

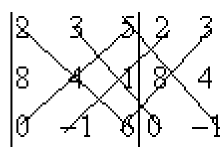
Complementar con el siguiente sitio web

http://www.mty.itesm.mx/etie/deptos/m/ma95-843/lecturas/l843-61.pdf

**Ejemplo**   Evalúa el determinante $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 8 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 6 \end{bmatrix}$

**Solución**

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 8 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 6 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & 3 \\ 8 & 4 \\ 0 & -1 \end{matrix} =(48 - 0 - 40) - (0 - 2 + 144) = 8 - 142 = -134$$



Complementar con el siguiente sitio web:

http://docencia.udea.edu.co/GeometriaVectorial/uni2/seccion21/ejemplos21.html#ej01

**DEFINICION:**   "El menor de un elemento $a_{ij}$ de un determinante, es igual al determinante que se obtiene cuando se suprime la fila i y la columna j. Denotaremos el menor de un elemento $a_{ij}$ como $m_{ij}$."[5]

**Ejemplo**  Obtener los menores de cada elemento de la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 4 & 5 & -1 \\ 2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

[5] WEBER,Jean. Matemáticas para Administración y Economía. México: Ed. Harla 1982, p. 649

**Solución**:

$$M_{11}= \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 4 & 5 & -1 \\ 2 & -3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 3 = -3$$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 4 & 5 & -1 \\ 2 & -3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 - (-2) = 2$$

$$M_{13} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 4 & 5 & -1 \\ 2 & -3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -12 - 10 = - 22$$

$$M_{21} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 4 & 5 & -1 \\ 2 & -3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 6 = -6$$

$$M_{22} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 4 & 5 & -1 \\ 2 & -3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 -(-4) = 4$$

$$M_{23} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 4 & 5 & -1 \\ 2 & -3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -9 - 2 = - 11$$

$$M_{31} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 4 & 5 & -1 \\ 2 & -3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = -1 - (-10) = 9$$

$$M_{32} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 4 & 5 & -1 \\ 2 & -3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -3 - (-8) = 5$$

$$M_{33} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 4 & 5 & -1 \\ 2 & -3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 15 - 4 = 11$$

**DEFINICION:** El cofactor de un elemento $a_{ij}$ del determinante de una matriz **A**. Se define como $(-1)^{i+j}$ veces su menor, y lo demostraremos por $C_{i\,j}$.

**<u>Ejemplo</u>** Los cofactores de la matriz **A** dada en el ejemplo anterior son:

$C_{11} = (-1)^{1+1}\, M_{11} = (-1)^{2}\, (-3) = -3$

$C_{12} = (-1)^{1+2}\, M_{12} = (-1)^{3}\, (2) = -2$

$C_{13} = (-1)^{1+3}\, M_{13} = (-1)^{4}\, (-22) = -22$

$C_{21} = (-1)^{2+1}\, M_{21} = (-1)^{3}\, (-6) = 6$

$C_{22} = (-1)^{2+2}\, M_{22} = (-1)^{4}\, (4) = 4$

$C_{23} = (-1)^{2+3}\, M_{23} = (-1)^{5}\, (-11) = 11$

$C_{31} = (-1)^{3+1}\, M_{31} = (-1)^{4}\, (9) = 9$

$C_{32} = (-1)^{3+2}\, M_{32} = (-1)^{5}\, (5) = -5$

$C_{33} = (-1)^{3+3}\, M_{33} = (-1)^{6}\, (11) = 11$

La matriz formada con los cofactores de los elementos de **A**, se denomina matriz de cofactores de **A**.

$C = \begin{bmatrix} -3 & -2 & -22 \\ 6 & 4 & 11 \\ 9 & -5 & 11 \end{bmatrix}$ es la matriz de cofactores de la matriz **A** del ejemplo

Complementar con el siguiente sitio web:

http://www.youtube.com/watch?v=Y5VFvr8gqMM

**DEFINICION:** **“**La transpuesta de la matriz de cofactores de **A** la llamaremos adjunta de **A**, se denotará por **adj A.”**[6]

**<u>Ejemplo</u>** La adjunta de la matriz **A** del ejemplo anterior es:.

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} -3 & 6 & 9 \\ -2 & 4 & -5 \\ -22 & 11 & 11 \end{bmatrix}$$

[6] WEBER,Jean. Matemáticas para Administración y Economía. México: Ed. Harla 1982, p. 649

**<u>Ejemplo</u>** Determine la adjunta de la matriz **B** = $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$

**Solución** Se calcula la matriz de cofactores así:

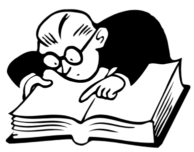
$C_{11} = (-1)^2\ M_{11} = (1)(8) = 8$

$C_{12} = (-1)^3\ M_{12} = (-1)(3) = -3$

$C_{21} = (-1)^3\ M_{21} = (-1)(5) = -5$ C = $\begin{bmatrix} 8 & -3 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$ Matriz de cofactores

$C_{22} = (-1)^4\ M_{22} = (1)(2) = 2$

Luego adj. B = $\begin{bmatrix} 8 & -5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$



***ACTIVIDAD 1.1***

Dadas las Matrices:

**A =** $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & -6 \end{bmatrix}$, **B =** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 4 \end{bmatrix}$, **C=** $\begin{bmatrix} 5 & 1 & 6 \\ -3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$, **D =** $\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$,

**E =** $\begin{bmatrix} -8 & 2 & -1 \\ -6 & 4 & 5 \end{bmatrix}$

**1.** Determine el tamaño de cada matriz.

**2.** Calcule $\frac{1}{4}$**A**

**3.** Calcule 3**C** - 4**E**

**4.** Calcule: **a) AC, b)EB, c) A$^2$ d) B$^2$**

**5.** Dadas las matrices A = $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 5 & 2 \end{bmatrix}$ ; B $\begin{bmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 4 & 5 & -2 \end{bmatrix}$

Hallar: **a) A + B** **b) 3B - 2A** **c) B - A**

**6.** Dadas las matrices:

**A =** $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & -5 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$; **B =** $\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$

Calcular: a**) AB;** **b) $A^2$;** **c)** $|A|$ **;** **d) $A^{-1}$**

**7.** Dadas las matrices:

**A =** $\begin{bmatrix} 7 & 8 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$; **B =** $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & -7 & 6 \end{bmatrix}$

Calcular: a**) AB;** b**) $A^2$;** c**)** $|\,A\,|$ **;** d**) $A^{-1}$**

## 1.5 INVERSA DE UNA MATRIZ

**DEFINICION: "**Sea **A** una matriz de tamaño n x n. Se dice que **A** es invertible o no singular sí existe una matriz cuadrada **B** de tamaño n x n tal que **AB = BA = I**, donde **I** es la matriz idéntica."[7]

A la matriz **B** se le denomina inversa de la matriz **A** y se denota como **B = $A^{-1}$**

**Ejemplo:**

La inversa de la matriz **A =** $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$ es **B =** $\begin{bmatrix} 8 & -5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

Porque: **AB =** $\begin{bmatrix} 2(8)+ & 5(-3) & 2(-5)+ & 5(2) \\ 3(8)+ & 8(-3) & 3(-5)+ & 8(2) \end{bmatrix}$ **=** $\begin{bmatrix} 16-15 & -10+10 \\ 24-24 & -15+16 \end{bmatrix}$ **=** $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

**BA =** $\begin{bmatrix} 8(2)+(-5)(3) & 8(5)+(-5)(8) \\ (-3)(2)+2(3) & (-3)(5)+2(8) \end{bmatrix}$ **=** $\begin{bmatrix} 16-15 & 40-40 \\ -6+6 & -15+16 \end{bmatrix}$ **=** $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

**Nota:** Si **A** es una matriz cuadrada que no tiene inversa, se dice que es una matriz singular.

Para determinar la inversa de una matriz, utilizaremos dos procedimientos: inversas por determinante e inversas por reducción.

---

[7] WEBER,Jean. Matemáticas para Administración y Economía. México: Ed. Harla 1982, p. 654

### 1.5.1 **INVERSAS POR DETERMINANTES:** La inversa de una matriz cuadrada **A** existe sí y sólo sí $|A|$ es distinto de cero; en tal caso, está dada por la expresión

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{|A|} adjA}$$

**Ejemplo:** Determine la inversa de la matriz **A =** $\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 4 & 5 & -1 \\ 2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$

**Solución:**

Se calcula el determinante

- $|A|$ = $[0 + \ \ 24 + \ \ (-2)]$ - $[-20 + \ \ 0 + \ \ 9]$ = 29 - (-11) = 33
- Se calcula la adjunta, adj. **A =** $\begin{bmatrix} -3 & 6 & 9 \\ -2 & 4 & -5 \\ -22 & 11 & 11 \end{bmatrix}$
- Luego **A**$^{-1}$ = $\frac{1}{33}\begin{bmatrix} -3 & 6 & 9 \\ -2 & 4 & -5 \\ -22 & 11 & 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{11} & \frac{2}{11} & \frac{3}{11} \\ -\frac{2}{33} & \frac{4}{33} & -\frac{5}{33} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

**Ejemplo:** Determine la inversa de la matriz

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

**Solución:** Para determinar la inversa se debe calcular $|B|$ y adj B.

- $|B|$ = (-4)(-2) - (2)(5) = 8 - 10 = -2
- Calculamos la adj.:

  $C_{11} = (-1)^2 M_{11} = (1)(-2) = -2$

  $C_{12} = (-1)^3 M_{12} = (-1)(2) = -2$

$C_{21} = (-1)^3\ M_{21} = (-1)(5) = -5$

$C_{22} = (-1)^4\ M_{22} = (1)(-4) = -4$

Matriz de cofactores **C** = $\begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -5 & -4 \end{bmatrix}$, adj **B =** $\begin{bmatrix} -2 & -5 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$

- La matriz inversa de **B** está dada por $\mathbf{B}^{-1} = \dfrac{1}{|B|}\, adjB$

Luego $\mathbf{B}^{-1} = \dfrac{1}{-2}\begin{bmatrix} -2 & -5 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5/2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

! Compruebe los resultados obtenidos en los ejemplos realizando el producto de matriz por su respectiva inversa ¡

**Ejemplo:** Determine la inversa de la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & -5 & 2 \\ 3 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

**Solución:** Debemos calcular $|A|$ y adj A

$|A| = [60 + (-8) + 6] - [60 + 6 + (-8)] = 58 - 58 = 0$

Como $|A| = 0$, $\dfrac{1}{|A|}$ no está definido. Por lo tanto la matriz **A** es singular, es decir, no existe su inversa.

### 1.5.2 INVERSA POR REDUCCION: "Consiste en formar la matriz ampliada $[A|\mathrm{I}]$ y reducirla a la forma $[\mathrm{I}|A^{-1}]$ mediante las siguientes operaciones de filas:

1. **Intercambiar dos filas**.
   La indicamos por $\mathbf{F_i} \leftrightarrow \mathbf{F_j}$
2. **Multiplicar una fila por una constante diferente de cero.**
   La indicamos por $\mathbf{k\ F_i}$
3. **Sumar (o restar) a una fila k veces otra fila**.
   La indicaremos por $\mathbf{F_i + k\ F_j}$

Para hacer la reducción de la matriz **A** la matriz $\mathrm{I}$ se sigue el siguiente procedimiento:

1. Realizamos operaciones entre filas para obtener 1 en el primer elemento de la primera columna.
2. Sumamos múltiplos apropiados de la primera fila a las otras filas de modo que los elementos restantes de la primera columna sean cero.
3. Usamos operaciones entre filas para hacer el segundo elemento de la segunda columna igual a 1, sin alterar la primera columna.
4. Sumamos múltiplos adecuados de la segunda fila a las otras filas para obtener ceros en el resto de la segunda columna.
5. Sin alterar las dos primeras columnas, hacemos que el tercer elemento de la tercera columna sea igual a 1.
6. Sumamos múltiplos adecuados de la segunda fila a las otras filas para obtener ceros en el resto de la tercera columna.
7. Continuamos el proceso columna por columna hasta obtener la forma reducida $\left[\mathrm{I}\middle|A^{-1}\right]$

**<u>Ejemplo:</u>** Determina la inversa de la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}$$

**<u>Solución</u>:** Formamos la matriz ampliada y reducimos.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 4 & -1 & 1 & 0 \\ 6 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{4}F_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 6 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{F_2-6F_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-\frac{3}{2}F_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{3}{2} \end{array}\right] \xrightarrow{F_1+\frac{1}{4}F_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{2}{3} \end{array}\right]$$

Así, la inversa de la matriz **A** es $\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \\ 1 & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$

**<u>Ejemplo:</u>** Halla la inversa de la matriz

$$\textbf{B =}\begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 5 & -2 & 0 \\ 1 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

**<u>Solución</u>:** Formamos la matriz ampliada y reducimos.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 6 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 6 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 5 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[F_3-4F_1]{F_2-5F_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 6 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -32 & -10 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & -21 & -9 & 1 & 0 & -4 \end{array}\right] \xrightarrow{-\frac{1}{32}F_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 6 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{5}{16} & 0 & -\frac{1}{32} & \frac{5}{32} \\ 0 & -21 & -9 & 1 & 0 & -4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[F_3+21F_2]{F_1-6F_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{1}{8} & 0 & \frac{3}{16} & \frac{1}{16} \\ 0 & 1 & \frac{5}{16} & 0 & -\frac{1}{32} & \frac{5}{32} \\ 0 & 0 & -\frac{39}{16} & 1 & -\frac{21}{32} & -\frac{23}{32} \end{array}\right] \xrightarrow{-\frac{16}{39}F_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{1}{8} & 0 & \frac{3}{16} & \frac{1}{16} \\ 0 & 1 & \frac{5}{16} & 0 & -\frac{1}{32} & \frac{5}{32} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{16}{39} & \frac{7}{26} & \frac{23}{78} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[F_2-\frac{5}{16}F_3]{F_1-\frac{1}{8}F_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{39} & \frac{2}{13} & \frac{1}{39} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{39} & -\frac{3}{26} & \frac{5}{78} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{16}{39} & \frac{7}{26} & \frac{23}{78} \end{array}\right] \text{, Así } \mathbf{B^{-1}=} \begin{bmatrix} \frac{2}{39} & \frac{2}{13} & \frac{1}{39} \\ \frac{5}{39} & -\frac{3}{26} & \frac{5}{78} \\ -\frac{16}{39} & \frac{7}{26} & \frac{23}{78} \end{bmatrix}$$

**<u>Ejemplo:</u>** Dada la matriz, $\mathbf{A =} \begin{bmatrix} -4 & 3 & 2 \\ 5 & -2 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Calcula: a) $|A|$ b) adj. A c) $A^{-1}$

**<u>Solución:</u>**

a) $|A|$ = (-8 + 10 + 36) - (-12 - 16 - 15) = 38 + 43 = 81.

b) $C_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$ = (1) (2- 4) = -2

$C_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$ =(-1) (-5 - 12) = 17

$C_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$ = (1) (5 + 6) = 11

$$C_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = (-1)\,(-3 - 2) = 5$$

$$C_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = (1)\,(4 - 6) = -2$$

$$C_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (-1)\,(-4 - 9) = 13$$

$$C_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = (1)\,(12 + 4) = 16$$

$$C_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = (-1)\,(-16 - 10) = 26$$

$$C_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = (1)\,(8 - 15) = -7$$

Se obtiene así la matriz de cofactores y la adjunta

$$C = \begin{bmatrix} -2 & 17 & 11 \\ 5 & -2 & 13 \\ 16 & 26 & -7 \end{bmatrix} \qquad \text{adj. } A = \begin{bmatrix} -2 & 5 & 16 \\ 17 & -2 & 26 \\ 11 & 13 & -7 \end{bmatrix}$$

c) $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}\ \text{adj } A = \dfrac{1}{81} \begin{bmatrix} -2 & 5 & 16 \\ 17 & -2 & 26 \\ 11 & 13 & -7 \end{bmatrix}$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{81} & \frac{5}{81} & \frac{16}{81} \\ \frac{17}{81} & -\frac{2}{81} & \frac{26}{81} \\ \frac{11}{81} & \frac{13}{81} & -\frac{7}{81} \end{bmatrix}$$

Complementar con el siguiente sitio web:

http://www.dcb.unam.mx/users/casianoam/algebra/capitulos/T06.pdf
http://www.uv.es/~perezsa/docencia/material/IMEE/Matrices.pdf

**RESUMEN**

- Una matriz es un arreglo rectangular de números reales encerrados en paréntesis rectangulares. Los números que forman el arreglo se denominan elementos de entrada de la matriz. Los elementos ubicados en forma horizontal forman una fila o renglón y los ubicados en forma vertical forman una columna.

- Algunos tipos de matrices son: Matriz cuadrada, nula, identidad, transpuesta, simétrica, triangular, Diagonal etc.
- Sí **A =** $[a_{ij}]$ y **B =** $[b_{ij}]$ Son dos matrices del mismo tamaño, entonces: **A + B =** $[a_{ij} + b_{ij}]$ y **A - B =** $[a_{ij} - b_{ij}]$
- sí **A** = $[a_{ij}]$ es una matriz mxn y **k** es un escalar, entonces **k A** = $[k\, a_{ij}]$.
- El producto de una fila $\mathbf{A}_{i\cdot}$ por una columna $\mathbf{A}_{\cdot j}$ está dado por:

$$\mathbf{A}_{i\cdot} \times \mathbf{A}_{\cdot j} = (\mathbf{a}_{ij} \times \mathbf{a}_{1j}) + (\mathbf{a}_{i2} \times \mathbf{a}_{2j}) + \ldots + (\mathbf{a}_{in} \times \mathbf{a}_{nj}) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{kj}$$

- Un determinante de orden dos se define como $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ $= \mathbf{a_1 b_2 - a_2 b_1}$

- Un determinante de orden 3 está definido por

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = (a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2) - (a_3b_2c_1 + a_2b_1c_3 + a_1b_3c_2)$$

- Un sistema de ecuaciones lineales con **m** ecuaciones y **n** variables puede expresarse como un producto de matrices **AX = B**, donde **A** es de tamaño **mxn** y está conformada por los coeficientes del sistema, **X** es de tamaño **mx1** y contiene las variables del sistema y **B** es la matriz de términos independientes y es de tamaño **mx1**.

**EVALUACIÓN**

PREGUNTAS DE SELECCIÓN MULTIPLE CON UICA RESPUESTA

**Con la siguiente información responda las preguntas 1 a 3**

Un experto en sondeos de opinión está observando detenidamente una reñida votación para elegir el alcalde de una ciudad. Las últimas encuestas indican las preferencias de los electores en seis distritos de la ciudad. La matriz **P** contiene dichas preferencias:

**DISTRITO**

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{6} \end{array} \\ P = & \begin{bmatrix} 0.40 & 0.25 & 0.30 & 0.50 & 0.30 & 0.36 \\ 0.42 & 0.40 & 0.25 & 0.30 & 0.30 & 0.32 \\ 0.18 & 0.25 & 0.45 & 0.20 & 0.40 & 0.32 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \textit{Democrata} \\ \text{Re}\,\textit{publicano} \\ \textit{Independiente} \end{array} \end{array} \qquad V = \begin{bmatrix} 30.000 \\ 60.000 \\ 70.000 \\ 45.000 \\ 55.000 \\ 40.000 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \textit{Distrito}\ 1 \\ \textit{Distrito}\ 2 \\ \textit{Distrito}\ 3 \\ \textit{Distrito}\ 4 \\ \textit{Distrito}\ 5 \\ \textit{Distrito}\ 6 \end{array}$$

Cada columna indica los porcentajes de electores en cada distrito que, según las proyecciones, votará por los diferentes candidatos a alcalde del pueblo. Con estas preferencias del electorado, es posible hacer una proyección del resultado de los comicios si se conoce el número de ciudadanos que se espera que voten en cada distrito. La matriz columna **V** contiene las estimaciones actuales de esos números.

**1.** Para determinar el número de votos esperado para cada candidato, se requiere

A. Hallar el producto **PV**

B. Hallar la suma **P + V**

C. Hallar el producto **VP**

D. Hallar la diferencia **P – V**

**2.** Al realizar el producto **PV** se obtiene:

A. Una matriz 3x6

B. Una matriz 6x3

C. Una matriz 3x1

D. Una matriz 1x3

**3.** El número de votos que se espera para el candidato Demócrata es:

A. 100.400

B. 101.400

C. 104.100

D. 104.400

**4.** El sistema lineal $\begin{matrix} 3x-4y+8=0 \\ 2y-4z+2=1 \\ 5x+2y+z=5 \end{matrix}$ se expresa en forma matricial como:

A. $\begin{bmatrix} 3 & -4 & 8 \\ 2 & -4 & 2 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$

B. $\begin{bmatrix} 3 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & -4 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -8 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}$

C. $\begin{bmatrix} 3 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & -4 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 8 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}$

D. $\begin{bmatrix} 3 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & -4 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{matrix} -8 \\ -1 \\ 5 \end{matrix}=\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

**5.** El determinante de la matriz $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$ es:

A. 10

B. -10

C. -26

D. 26

**6.** Si el determinante de una matriz es diferente de cero, se dice que es:

A. Cuadrada

B. Invertible

C. Simétrica

D. Triangular

## UNIDAD 2

### PRESENTACION

Un sistema de ecuaciones consta de dos o más ecuaciones que contienen dos o más variables, llamadas comúnmente incógnitas. Esta unidad hace referencia a los **sistemas de ecuaciones lineales,** exponiendo los sistemas cuadrados y los diferentes métodos para hallar su solución**.**

La comprensión de esta unidad es fundamental para el buen desempeño en los temas subsiguientes de matemáticas y en el estudio de la estadística

### NOMBRE: SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

### PREGUNTA PROBLEMA

¿Qué situaciones propias de la administración son modelables mediante sistemas de ecuaciones?

**COMPETENCIAS ESPECÍFICAS**

- Aplica la teoría de matrices en la solución de sistemas lineales.
- Resuelve sistemas lineales mxn usando diferentes métodos
- Identifica la relación existente entre los sistemas de ecuaciones y las matrices
- Reconoce la importancia de los sistemas de ecuaciones para la modelación de situaciones del contexto.

**SABERES**

2.1 Sistemas de ecuaciones mxn
2.2 Solución de sistemas de ecuaciones lineales
2.3 Sistemas de ecuaciones homogéneos
2.4 Aplicaciones: Modelo insumo producto de Leontief, Procesos de Markov y Teoría de Juegos. (Opcional)

# DINAMICA PARA CONSTRUIR EL CONOCIMIENTO

## ACTIVIDAD PREVIA (Trabajo Individual)

1. De los siguientes sistemas es lineal:

$a.\begin{cases} 3x+5y=8 \\ 4x^2-y=4 \end{cases}$ $\qquad b.\begin{cases} 4x+2y-3z=4 \\ 2x+3y=5 \end{cases}$ $\qquad c.\begin{cases} 4x+\dfrac{2}{y}+3=0 \\ 5x-2z=3 \end{cases}$

2. El sistema $\begin{cases} 4x_1+3x_2=12 \\ 8x_1+6x_2=24 \end{cases}$, tiene:

   **a.** Solución única.
   **b.** Dos soluciones.
   **c.** Infinitas soluciones.
   **d.** Ninguna solución.

3. La solución del sistema $\begin{cases} x+3y=1 \\ 2x-y=9 \end{cases}$ es:

   **a.** x =1, y = 0
   **b.** x = 7, y = - 2
   **c.** x = 4, y = -1
   **d.** x = 5, y = 1

4. La solución del sistema $\begin{cases} 2x+y-3z=-1 \\ 3x-2y+4z=-2 \\ x+y+3z=11 \end{cases}$ es:

   **a.** x = 1, y = 3, z = 2
   **b.** x = 3, y = -1, z = 2
   **c.** x = 5, y = 0, z = 3
   **d.** x = 0, y = 5, z = 2

**ACTIVIDAD GRUPAL**

1. Reunidos en CIPAS, lea nuevamente la Unidad 2.
2. Socialicen los resúmenes elaborados de manera individual e independiente.
3. Socialicen las respuestas de la sección Atrévete a opinar, que respondieron de manera individual.
4. Socialicen las respuestas de las actividades, que respondieron de manera individual.
5. Desarrollen los ejercicios que se encuentra al final de la Unidad 2 y discútanlos en el grupo de estudios. Estos ejercicios deben ser socializados en la sesión junto con todos los compañeros de grupo y entregados al tutor.

**SABERES Y ACTIVIDADES**

## 2. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

### 2.1 Sistemas de ecuaciones mxn

Un sistema de ecuaciones lineales está formado por m ecuaciones lineales con n variables.

$$
\begin{array}{l}
a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 + \ldots + a_{1n}Xn = b_1 \\
a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + a_{23}X_3 + \ldots + a_{2n}X_n = b_2 \\
a_{31}X_1 + a_{32}X_2 + a_{33}X_3 + \ldots + a_{3n}X_n = b_3 \\
. \quad . \quad\quad . \quad . \quad\quad . \quad . \quad \ldots \quad . \quad . \quad . \\
. \quad . \quad\quad . \quad . \quad\quad . \quad . \quad \ldots \quad . \quad . \quad . \\
. \quad . \quad\quad . \quad . \quad\quad . \quad . \quad \ldots \quad . \quad . \quad . \\
a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + a_{m3}X_3 + \ldots + a_{mn}X_n = b_m
\end{array}
$$

Donde los $a_{ij}$ y $b_i$ son constantes y las $X_j$ son las variables.

En este modulo se estudiara los denominados sistemas lineales cuadrados, es decir, aquellos cuyo número de variables es igual al número de ecuaciones.

Los sistemas lineales 2x2 (dos ecuaciones con dos variables), son de la forma:

$$
\boxed{
\begin{array}{ll}
Ax + By + C = 0 & (1) \\
Dx + Ey + F = 0 & (2)
\end{array}
}
$$

Donde A, B, C, D, E, F son constantes.

**Ejemplo:** Los siguientes son sistemas lineales 2x2.

a) $\begin{array}{l} 4x - 2y = -4 \\ 5x + 3y = 3 \end{array}$ b) $\begin{array}{l} 3x + 2y = 5 \\ 6x - 4y = 2 \end{array}$ c) $\begin{array}{l} x + y = 2 \\ x - y = 6 \end{array}$

**SISTEMAS TRES POR TRES**

Estos sistemas constan de tres ecuaciones lineales con tres variables o incógnitas, es decir, tienen la forma

$$
\begin{aligned}
a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 &= d_1 \\
a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 &= d_2 \\
a_3x_1 + b_3x_2 + c_3x_3 &= d_3
\end{aligned}
$$

Es de anotar que las variables $x_1,\ x_2,\ x_3$ también se acostumbra sustituirlas por las últimas letras de nuestro alfabeto.

Resolver un sistema lineal tres por tres gráficamente es un tanto complicado debido a que la grafica tendría que ser realizada en tres dimensiones, lo cual requiere de mucha destreza y habilidad en el trazado. Por lo tanto, es recomendable la utilización de otros métodos para su solución, entre los que podemos destacar, el método de eliminación, y los métodos que utilizan las matrices (regla de Cramer, inversa o reducción Gauss-Jordan).

## 2.2 SOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

En la **Matemáticas Basicas** se dio la definición de un sistema de ecuaciones lineales y se resolvieron algunos sistemas 2x2. En ésta conoceremos la forma matricial de un sistema de ecuaciones lineales y la aplicación de la teoría de matrices en su solución.

Es de anotar, que aunque el módulo solo trabaja sistemas que tienen igual número de ecuaciones que de variables, existe otro tipo de sistemas lineales que pueden ser solucionados. Si estás interesado en estos, consulta a tu tutor o al autor del módulo.

Así el sistema 3x3 siguiente

**<u>Ejemplo</u>** Resolver el sistema

$$\begin{aligned} 2x+3y+z&=1 && (1)\\ 6x-2y-z&=-14 && (2)\\ 3x+\ \ y-z&=1 && (3) \end{aligned}$$

**<u>Solución:</u>** Combinamos las ecuaciones **1** y **2** y eliminamos **z**

$$\begin{array}{l} 2x+3y+z=1\\ 6x-2y-z=-14\\ \hline 8x+\ y\qquad =-13 \qquad\qquad (4) \end{array}$$

Combinamos las ecuaciones **1** y **3** y eliminamos **z**

$$\begin{array}{l} 2x+3y+z=1\\ 3x+\ \ y-z=1\\ \hline 5x+4y\quad =2 \qquad\qquad (5) \end{array}$$

Se resuelve el sistema formado por las ecuaciones **4** y **5,** multiplicando la (**4**) por – 4**,** así:

$$\begin{array}{l} -32x-4y=52\\ \ \ 5x\ \ +4y\ =2\\ \hline -27x\qquad =54 \end{array}$$

$$x=\frac{54}{-27}$$

$$x=-2$$

Se reemplaza el valor de **x** en la ecuación 4 y se obtiene:

$$8(-2)+y=-13$$

$$-16+y=-13$$

$$y=-13+16$$

$$y=3$$

Se reemplaza los valores de **x** e **y** en la ecuación **1** y se obtiene:

$$2(-2)+3(3)+z=1$$

$$-4\ \ +\ \ 9\ +z=1$$

$$z=1+4-9$$

$$z=-4$$

Así, la solución del sistema es $x=-2, \quad y=3, \quad z=-4$

El planteamiento de algunas situaciones de la vida diaria o problemas aplicación en administración, generan sistemas de tres ecuaciones lineales con tres variables.

**Ejemplo:** “Una compañía produce tres tipos de muebles para patio; sillas, mecedoras y sillones reclinables. Cada uno requiere de madera, plástico y aluminio, como se indica en la tabla siguiente. La compañía tiene existencia de 400 unidades de madera, 60 unidades de plástico y 15000 unidades de aluminio. Para la corrida de fin de temporada, la compañía quiere utilizar todas sus existencias. Para hacer esto, ¿cuántas sillas, mecedoras y sillones debe fabricar?“[8]

| | Madera | Plástico | Aluminio |
|---|---|---|---|
| Sillas | 1 unidad | 1 unidad | 2 unidades |
| Mecedoras | 1 unidad | 1 unidad | 3 unidades |
| Sillones | 1 unidad | 2 unidades | 5 unidades |

**Solución:** Para la solución de este problema se requiere representar los términos desconocidos (interrogantes) mediante variables, así:

Sea $x_1$ el numero de sillas a producir, $x_2$ el número de mesas a producir y $x_3$ el numero de sillones a producir.

Los requerimientos en madera son de 1 unidad por cada silla, 1 unidad por cada mesa y 1 unidad por cada sillón. Como la existencia de madera es de 400 unidades, se tiene la Ecuación: $1x_1 + 1x_2 + 1x_3 = 400$ (1)

Los requerimientos en Plástico son de 1 unidad por cada silla, 1 unidad por cada mesa y 2 unidades por cada sillón. Como la existencia de plástico es de 600 unidades, se tiene la Ecuación: $1x_1 + 1x_2 + 2x_3 = 600$ (2)

[8] HAEUSSLER, E y PAUl, R. Matemáticas para Admón. Economía y ciencias Sociales. México: Prentice Hall 1997, p.159

Los requerimientos en Aluminio son de 2 unidades por cada silla, 3 unidades por cada mesa y 5 unidades por cada sillón. Como la existencia de aluminio es de 1500 unidades, se tiene la Ecuación: $2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 1500$ (3)

Se ha formado un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas, el cual se puede resolver siguiendo los pasos anteriores, así:

Combinamos las ecuaciones (1) y (2), multiplicando la (1) por – 1.

$$\begin{array}{r} -x_1 - x_2 - x_3 = -400 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 600 \\ \hline x_3 = 200 \end{array}$$

Se ha obtenido el valor de $x_3$, es decir, el número de sillones que deben producirse.

Combinamos las ecuaciones (1) y (3) multiplicando la (1) por – 2, así:

$$\begin{array}{r} -2x_1 - 2x_2 - 2x_3 = -800 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 1500 \\ \hline x_2 + 3x_3 = 700 \end{array} \qquad (4)$$

Se remplaza el valor de $x_3$ en la ecuación (4)

$$x_2 + 3\,(200) = 700$$
$$x_2 + 600 = 700$$
$$x_2 = 700 - 600$$
$$x_2 = 100$$

Se remplaza el valor de $x_2$ y $x_3$ en la ecuación (1)

$$x_1 + (100) + (200) = 400$$
$$x_1 = 400 - 100 - 200$$
$$x_1 = 100$$

*Por lo tanto, se deben producir 100 sillas, 100 mecedoras y 200 sillones para agotar las existencias en madera, plástico y aluminio de la compañía.*

**Ejemplo**: Un capital de $ 12.000.000 se invierte en tres negocios A, B y C que producen una ganancia mensual de 5%, 6%  9% respectivamente. La suma de las ganancias durante un mes son de $852.000  y la diferencia entre las ganancias producida por el negocio A y el negocio B es de $ 90.000, ¿qué cantidad se invirtió en cada negocio?

**Solución:** Sea **x** la cantidad invertida en el negocio A.

**y** la cantidad invertida en el negocio B.

**z** la cantidad invertida en el negocio C.

Como el total invertido es de $12.000.000, se obtiene la ecuación

$$x + y + z = 12.000.000 \qquad (1)$$

La ganancia producida por cada negocio se obtiene multiplicando el capital invertido por la tasa respectiva, con lo cual podemos expresar la ganancia total de un mes como $0,05x + 0,06y + 0,09z = 852.000 \qquad (2)$

De igual manera, la diferencia entre Las ganancias de los negocios A y B se expresan como $0,05x - 0,06y = 90.000 \qquad (3)$

Se tiene entonces un sistema lineal de tres ecuaciones con tres incógnitas, el cual resolveremos de la siguiente manera:

Combinemos las ecuaciones (1) y (2), multiplicando la (1) por – 0,09 para eliminar la variable z

$$\begin{array}{r}
-0,09x - 0,09y - 0,09z = -1.080.000 \\
0,05x + 0,06y + 0,09z = \quad 852.000 \\
\hline
-0,04x - 0,03y \qquad = -228.000 \qquad (4)
\end{array}$$

*Resolvemos el sistema formado por las ecuaciones (3) y (4), multiplicando la ecuación (4) por* $-2$*, así.*

$$\begin{aligned} 0{,}05x - 0{,}06y &= 90.000 \\ 0{,}08x + 0{,}06y &= 456.000 \\ \hline 0{,}13x \qquad\quad &= 546.000 \\ x &= \frac{546.000}{0{,}13} \\ x &= 4.200.000 \end{aligned}$$

*Se remplaza el valor de x en la ecuación (4)*

$$\begin{aligned} 0{,}05\,(4.200.000) - 0{,}06y &= 90.000 \\ 210.000 - 0{,}06y &= 90.000 \\ -0{,}06y &= 90.000 - 210.000 \\ y &= \frac{-120.000}{-0{,}06} \\ y &= 2.000.000 \end{aligned}$$

*Se remplazan los valores de x e y en la ecuación (1)*

$$\begin{aligned} 4.200.000 + 2.000.000 + z &= 12.000.000 \\ z &= 12.000.000 - 6.200.000 \\ z &= 5.800.000 \end{aligned}$$

Así, en el negocio A se invirtieron $4.200.000, en el negocio B se invirtieron $2.000.000 y la inversión en el negocio C fue de $5.800.000

**DEFINICION:** Un sistema de ecuaciones lineales con **m** ecuaciones y **n** variables puede expresarse como un producto de matrices **AX = B**, donde **A** es de tamaño **mxn** y está conformada por los coeficientes del sistema, **X** es de tamaño **mx1** y contiene las variables del sistema y **B** es la matriz de términos independientes y es de tamaño **mx1**.

<u>**Ejemplo:**</u> El sistema

$$\begin{aligned} 4x - 3y + 3z &= 12 \qquad (1) \\ x + 3y - 6z &= 6 \qquad (2) \\ 4x - y - 4z &= 0 \qquad (3) \end{aligned}$$

Puede expresarse como:

$$\begin{bmatrix} 4 & -3 & 3 \\ 1 & 3 & -6 \\ 4 & -1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dado que la forma matricial de un sistema de ecuaciones lineales es **AX = B,** la solución de un sistema con **n** ecuaciones y **n** variables está dada por **X =** $\frac{B}{A}$ **=** $\frac{1}{A}$**.B,** o lo que es lo mismo

$$\boxed{\mathbf{X = A^{-1}B}}$$

Observa que $\mathbf{A^{-1}}$ está a la izquierda de **B**. Esto se debe a que $\mathbf{A^{-1}}$ es de tamaño **nxn**, **B** es de tamaño **nx1** y el producto sólo está definido si el número de columnas del primer factor es igual al número de filas del segundo.

<u>**Ejemplo:**</u> Resolver el sistema del ejemplo anterior

Solución: Del ejemplo anterior se tiene que:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 3 \\ 1 & 3 & -6 \\ 4 & -1 & -4 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 12 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para resolver el sistema debemos hallar $\mathbf{A^{-1}}$.

Hallamos el determinante $|A|$ = (-48 -3 +72) - (36 +24 +12) = 21 -72 = -51

Hallamos los cofactores

$C_{11}$ = -18 $C_{21}$ = -15 $C_{31}$ = 9

$C_{12}$ = -20 $C_{22}$ = -28 $C_{32}$ = 27

$C_{13}$ = -13 $C_{23}$ = -8 $C_{33}$ = 15

$$C = \begin{bmatrix} -18 & -20 & -13 \\ -15 & -28 & -8 \\ 9 & 27 & 15 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-51} \begin{bmatrix} -18 & -15 & 9 \\ -20 & -28 & 27 \\ -13 & -8 & 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{6}{17} & \frac{5}{17} & -\frac{3}{17} \\ \frac{20}{51} & \frac{28}{51} & -\frac{9}{17} \\ \frac{13}{51} & \frac{8}{51} & -\frac{5}{17} \end{bmatrix}$$

Hallamos la solución con la expresión $\mathbf{X = A^{-1}B}$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{6}{17} & \frac{5}{17} & -\frac{3}{17} \\ \frac{20}{51} & \frac{28}{51} & -\frac{9}{17} \\ \frac{13}{51} & \frac{8}{51} & -\frac{5}{17} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \\ 4 \end{bmatrix}$$

La solución del sistema es x = 6, y = 8,  z = 4.

Otra forma para resolver el sistema lineal consiste en ampliar la matriz de coeficientes agregando el vector de términos independientes a la derecha, y luego reducir la matriz así:

$$\begin{bmatrix} 4 & -3 & 3 & 12 \\ 1 & 3 & -6 & 6 \\ 4 & -1 & -4 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -6 & 6 \\ 4 & -3 & 3 & 12 \\ 4 & -1 & -4 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[F_3 - 4F_1]{F_2 - 4F_1} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -6 & 6 \\ 0 & -15 & 27 & -12 \\ 0 & -13 & 20 & -24 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{15}F_2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -6 & 6 \\ 0 & 1 & -\frac{9}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & -13 & 20 & -24 \end{bmatrix} \xrightarrow[F_3 + 13F_2]{F_1 - 3F_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{5} & \frac{18}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{9}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & 0 & -\frac{17}{5} & -\frac{68}{5} \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-\frac{5}{17}F_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{5} & \frac{18}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{9}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[F_2 + \frac{9}{5}F_3]{F_1 + \frac{3}{5}F_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

La solución del sistema es **x** = 6, **y** = 8, **z** = 4

**Ejemplo:** Resolver con el uso de la teoría de matrices el sistema:

8x - 3y = 1

6x + 2y = 5

**Solución:**

Expresamos el sistema en forma matricial

$$\begin{bmatrix} 8 & -3 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

a) Primer procedimiento:

i) Hallamos el determinante de la matriz de coeficiente **A**

$|A|$ = 16 - (-18) = 34

ii) Hallamos la adjunta de **A**

$C_{11} = 2$ $C_{12} = -6$ $C_{21} = 3$ $C_{22} = 8$, $\text{Adj } A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -6 & 8 \end{bmatrix}$

iii) Hallamos la inversa de A, $A^{-1} = \frac{1}{34} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -6 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{17} & \frac{3}{34} \\ -\frac{3}{17} & \frac{4}{17} \end{bmatrix}$

iv) La solución del sistema es:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \frac{1}{17} & \frac{3}{34} \\ -\frac{3}{17} & \frac{4}{17} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}. \text{ Así } x = \frac{1}{2},\ y = 1$$

b) Segundo procedimiento

$$\begin{bmatrix} 8 & -3 & 1 \\ 6 & 2 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{8}F_1} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{8} & \frac{1}{8} \\ 6 & 2 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2 - 6F_1} \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \\ 0 & \frac{17}{4} & \frac{17}{4} \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{4}{17}F_2} \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_1 + \frac{3}{8}F_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ La solución es } x = \frac{1}{2},\ y = 1$$

Otro procedimiento para resolver un sistema lineal cuadrado, es la llamada regla de CRAMER. La cual permite calcular los valores de las incógnitas mediante el cociente de los determinantes de cada una de las incógnitas y el determinante del sistema.

El determinante del sistema está dado por el determinante de la matriz de coeficientes.

El determinante de cada variable se obtiene de la matriz que resulta al remplazar los coeficientes de dicha variable por los términos independientes en la matriz del sistema.

**Ejemplo:** Resolver con el uso de regla de Cramer el sistema:

$$8x - 3y = 1$$
$$6x + 2y = 5$$

**Solución:**

- Se calcula el determinante del sistema

$$\Delta = \begin{vmatrix} 8 & -3 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = 16 - (-18) = 34$$

- Se calcula el determinante de cada variable

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 2 - (-15) = 17$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 8 & 1 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = 40 - 6 = 34$$

- Se calcula el valor de cada una de las incógnitas

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{17}{34} = \frac{1}{2} \qquad\qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{34}{34} = 1$$

Complementar con el siguiente sitio web:

http://eco-mat.ccee.uma.es/Libro/MATRICES/Matrices5.htm
http://docencia.udea.edu.co/GeometriaVectorial/uni1/seccion11/ejemplos11.html#ej01

### 2.3 Aplicaciones: Modelo insumo producto de Leontief, Cadenas de Markov y Teoría de Juegos. (Opcional)

**Modelo insumo producto de Leontief**

En el presente artículo hablaremos de un tema que se desarrolla en Matemáticas Aplicadas como una aplicación del Algebra de Matrices, se trata del modelo de Insumo –Producto, el cual fue creado por Wasile Leontief. [9]

El modelo de insumo – Producto tiene un fuerte componente Matemático, específicamente del Algebra Lineal, y permite a los Economistas predecir futuros niveles de producción a partir de una demanda final proyectada. Presenta la

[9] Para el estudio de este tema se tomo el artículo Matemáticas Aplicadas: Una introducción al modelo Insumo Producto, de la docente Sandra Rojas Sevilla.

información en tablas de insumo producto en las cuales se refleja la interacción de las industrias o de los sectores de una economía.

Se describe las tablas de insumo producto, luego se detalla la construcción de la matriz de coeficientes técnicos, $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$, así como la obtención de un sistema de ecuaciones lineales para n industrias y su respectiva representación matricial. Luego se obtiene la matriz de

LEONTIEF $(I - A)$ Y LA INVERSA DE LEONTIEF. $(I - A)^{-1}$ , se desarrolla una situación hipotética de una economía que costa solo de tres sectores.

Obteniendo como resultado la participación activa de los estudiantes, y la incorporación de los mismos en procesos propios de la investigación.

**Introducción.**

Con el objetivo de facilitar la descripción del modelo se supone una economía que conste solo de tres industrias. Para un análisis económico real, se debe considerar un número mucho más grande de sectores, lo que introduce grandes complicaciones en los cálculos por lo que se hace necesario incorporar el uso de software Matemáticos tales como Matlab, wx-maxima entre otros.

Wassily Leontief. Economista de origen Ruso de nacionalidad Estadounidense, Gano El premio Nobel de Economía en el año 1973 por ser el creador del “análisis de insumo-producto” (input-output) y por sus aplicaciones a importantes problemas económicos, según la fundación Nobel.

Este modelo es hoy día una herramienta importante para la planificación de la producción económica de los países.

Desde un enfoque Matemático se puede decir que:

El “análisis de insumo-producto” es una técnica matemática que refleja la interdependencia entre los distintos sectores de una economía y entre factores productivos y productos.

El modelo de insumo-producto constituye la fusión de la economía del equilibrio general con el álgebra matricial.

**Por otra parte el “análisis de insumo-producto” constituye una de las tres ramas de la denominada “economía lineal”. Las otras dos ramas son la “programación lineal” y la “teoría de los juegos”.**

El “análisis de insumo-producto” y la “programación lineal” se relacionan. La programación lineal es en realidad un vástago de una técnica más amplia constituida por el análisis de insumo-producto.

Desde el punto de vista Económico y funcional se puede decir que el modelo de Insumo Producto:

Tiene entre sus características importantes reflejar las interacciones entre diferentes industrias o sectores que integran la economía, interpretando la interdependencia que se da entre los diversos sectores de la economía, es decir en este modelo se considera cualquier sistema económico como un complejo de industrias mutuamente interrelacionadas. Se considera que toda industria recibe materias primas (insumos) de las demás industrias en calidad de materia prima. Fundamentalmente se trata de un análisis general de equilibrio estático de las condiciones tecnológicas de la producción total de una economía, durante el periodo de tiempo determinado.

Uno de los objetivos de este modelo es permitir a los Economistas predecir los niveles de producción futuros de cada sector de la economía a fin de satisfacer las demandas futuras para diversos productos, Es decir, determinar cuánto producirá una industria a fin de alcanzar un equilibrio entre la oferta y la demanda.

Pero tal predicción es un tanto compleja puesto que para que pueda funcionar, cada uno de estos sectores necesita comprarle insumos a los otros, y también así mismo y hay cierta cantidad de insumos que se venden a terceros, provocando que cuando se aumenta la producción de un sector necesariamente debe aumentar la producción de los otros sectores para poder satisfacer la demanda.

Por ejemplo

En el sector de la producción de energía, las compañías de electricidad generan energía que

i) Se necesita para operar sus propias plantas

ii) Requiere para satisfacer las necesidades eléctricas de otras empresas

iii) Necesita para satisfacer las exigencias de los consumidores en general

Las dos primeras son ejemplos de la demanda **interindustrial** y el último de la demanda **no industrial.**

**MATRIZ DE INSUMO PRODUCTO.** La presentación de los datos de la Matriz de Insumo-Producto permite una explotación matemática muy útil mediante el uso del álgebra de matrices.

Es conveniente tabular los datos para el análisis de insumo – producto, como en la siguiente tabla.

| | Usuario | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| PRODUCTOR | 1 | 2 | … | n | Demanda Final | Producción Total |
| 1 | $b_{11}$ | $b_{12}$ | … | $b_{1n}$ | $d_1$ | $x_1$ |
| 2 | $b_{21}$ | $b_{22}$ | … | $b_{2n}$ | $d_2$ | $x_2$ |
| . | . | . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . | . | . |
| N | $b_{n1}$ | $b_{n2}$ | … | $b_{n1}$ | $d_n$ | $x_n$ |
| VA | VA1 | VA2 | … | VAn | | |
| Consumo total | $x_1$ | $x_2$ | … | $X_n$ | | |

En donde $b_{ij}$ es el importe (en unidades monetarias) de los productos de la industria i empleados por la industria j, $d_i$ es la ademanda final para los productos de la industria i y $x_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} + d_i$, VA: es el valor agregado de la producción es la diferencia entre el valor bruto de la producción y el valor de los insumos de cada sector, y corresponde a las remuneraciones de los trabajadores que se requieren para la producción, y también al beneficio bruto. El beneficio bruto surge como la diferencia entre el valor agregado y las remuneraciones.

La demanda interindustrial generalmente se presenta en una matriz $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ llamada **matriz de insumo producto o matriz tecnológica.** Donde cada $a_{ij} =$

$\frac{b_{ij}}{x_j}$, es el valor monetario de la producción de la industria i que la industria j debe adquirir para producir una unidad monetaria de sus propios productos.

De donde se deduce que las ecuaciones de este sistema presentan la forma general.

**Producción de la industria = demanda interindustrial + demanda noindustrial**

$$x_1 = a_{12}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n + d_1$$
$$x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n + d_2$$
$$x_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n + d_3$$
$$\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots$$
$$x_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nn}x_n + d_n$$

La anterior ecuación se traduce, en el siguiente sistema de ecuaciones para n sectores de la economía

Llamase $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{1n} \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

Donde $D$ representa los valores de demanda no industrial.

Reescribiendo el sistema de ecuaciones anterior y aplicando operaciones de matrices se obtiene

Se tiene que $X = AX + D$ se conoce como ecuación de insumo producto

$$X - AX = D$$
$$(I - A)X = D$$
$$(I - A)^{-1}(I - A)X = (I - A)^{-1}D$$
$$IX = (I - A)^{-1}D$$

$X = (I - A)^{-1}D$ **Ecuación N°1**

Donde $I$ es la matriz identidad de orden n.

Y $(I - A)^{-1}$ se llama Matriz de coeficientes Directos e indirectos por unidad de demanda final.

La matriz $(I - A)$ se conoce como matriz de Leontief

$(I - A)^{-1} = \frac{1}{det(I-A)} adj(I - A)$ **Ecuación. 2**

$Adj(I-A) = C^t$ , La Matriz $C = (c_{ij})$ se conoce como Matriz de Cofactores y cada elemento de $C$ se obtiene de la siguiente Manera $c_{ij} = (-1)^{i+j} * det(M_{ij})$ donde $\det(M_{ij})$ resulta de suprimir la i-ésima fila y la j-ésima columna en la matriz $(I-A)$

$C^t$ , denota la transpuesta de la Matriz C (resulta de cambiar filas por columnas o viceversa)

Del algebra lineal se conoce que para que la inversa de una matriz exista el determinante de la matriz debe ser diferente de cero y para que la solución del sistema de ecuaciones tenga significado económico la matriz tecnológica $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ debe ser tal que cada $x_i$ sea no negativa, entonces dado un conjunto de demandas finales positivas considérese el problema de determinación de las condiciones en las cuales existe un conjunto único de niveles de producción positivos, compatibles con el conjunto de demandas finales.

Por tanto se debe cumplirse:

a) $0 \leq a_{ij} < 1 \; para\ toda\ i\ y\ toda\ j$

b) $\det(I-A) > 0$

En otras palabras todos los menores principales del determinante de Leontief deben ser positivos, puesto que cualquier subconjunto de k industrias de las n consideradas debe ser capaz de satisfacer las demandas interindustriales con algún excedente para satisfacer las demandas externas a las k industrias.

**Ejemplo de una situación hipotética**, analicemos esta tabla con tres sectores: agricultura, industria y servicios, que están relacionadas entre sí.

| | Usuario | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **PRODUCTOR** | **Agricultura** | **industria** | **servicios** | **Demanda Final** | **Producción Total** |
| **Agricultura** | 16 | 30 | 20 | 14 | 80 |
| **Industria** | 32 | 15 | 80 | 23 | 150 |
| **Servicios.** | 24 | 75 | 40 | 61 | 200 |
| **Insumos de mano de obra.** | 8 | 30 | 60 | | |
| **Consumo total** | **80** | **150** | **200** | | |

Se pide:

a) fijar un sector y haga una lectura vertical (columnas) y horizontal (filas)

b) Hallar la matriz de insumo producto o matriz tecnológica

c) suponga que en tres años el consumo demanda un cambio a 20 unidades en el caso de la agricultura a 50 para la industria y a 70 en el caso de los servicios. ¿Cuánto deberá producir cada industria dentro de tres años a fin de satisfacer esta demanda proyectada?
d) Construya la nueva tabla de insumo producto.

Solución.

a) Si fijamos un sector, leyendo verticalmente, cada columna nos dice cuántos insumos compra ese sector a los demás. Por ejemplo servicios debe utilizar insumos de otros sectores y compra: a Agricultura 20 a industria 80 y a servicios 40

Horizontalmente, cada fila nos dice cuánto Vende cada sector a los demás, por ejemplo los servicios son vendidos así: agricultura 24, industria 75, servicios 40.
Hay otra columna que no corresponde a un sector, la columna de la demanda final.
Allí aparecen los consumos que no corresponden a los tres sectores acá mencionados: Representan las compras de los consumidores finales (que no se encuadran en ningún sector productivo), a la inversión (es la parte de la producción del período que se acumula para los siguientes), incluye las exportaciones, etc. Por ejemplo siguiendo en al caso de los servicios, vende a otros 61 a demás de lo que vende a los tres sectores en acá incluidos.
Finalmente la última columna corresponde al valor bruto de la producción de cada sector: es la suma de todas las ventas, por ejemplo en el caso de los servicios:
24+75+40+61=200

Mirando las filas, falta comentar la fila de insumos de mano de obra, que surge como la diferencia entre el valor bruto de la producción y el valor de los insumos de cada sector. En el caso de los servicios es: 200-(20+80+40) = 60

b) Para hallar la matriz A, usamos $a_{ij} = \frac{b_{ij}}{x_j}$,

$$A = \begin{pmatrix} \frac{16}{80} & \frac{30}{150} & \frac{20}{200} \\ \frac{32}{80} & \frac{15}{150} & \frac{80}{200} \\ \frac{24}{80} & \frac{75}{150} & \frac{40}{200} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}4 & 0{,}1 & 0{,}4 \\ 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}2 \end{pmatrix}$$

c) Como $a_{ij} = \frac{b_{ij}}{x_j}$, entonces $b_{ij} = a_{ij}x_j$ verificándose el sistema que se obtuvo para n sectores.

Usando la ecuación insumo producto $X = AX + D$ en forma simplificada se tiene la ecuacion.1 $X = (I - A)^{-1}D$

Donde $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, se llama matriz de producción. Utilizando esta ultima ecuación y $D^* = \begin{pmatrix} 20 \\ 50 \\ 70 \end{pmatrix}$ Matriz de demanda final proyectada se obtiene una nueva **matriz de producción** $X^* = (I - A)^{-1}D^*$

En este paso la está la hipótesis principal del modelo de Leontief: La matriz de Insumo -Producto $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ es siempre la misma, aunque varié la Demanda Final. También la matriz $(I - A)^{-1}$ es la misma, debido a que solo depende de A.

En la realidad, estas matrices no permanecen estáticas como se supone, pueden variar por distintos motivos (adelantos tecnológicos, aparición de nuevos sectores o desaparición de otros, etc) y suelen ser re-calculadas cada cierto tiempo.

$$X^* = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \left[ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,2 & 0,2 & 0,1 \\ 0,4 & 0,1 & 0,4 \\ 0,3 & 0,5 & 0,2 \end{pmatrix} \right]^{-1} * \begin{pmatrix} 20 \\ 50 \\ 70 \end{pmatrix} = \left[ \begin{pmatrix} 0,8 & -0,2 & -0,1 \\ -0,4 & 0,9 & -0,4 \\ -0,3 & -0,5 & 0,8 \end{pmatrix} \right]^{-1} * \begin{pmatrix} 20 \\ 50 \\ 70 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1.8505 & 0.7473 & 0.6050 \\ 1.5658 & 2.1708 & 1.2811 \\ 1.6726 & 1.6370 & 2.2776 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 \\ 50 \\ 70 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 116.7260 \\ 229.5374 \\ 274.7331 \end{pmatrix}$$

Así que la Agricultura deberá producir $116.7260$ , industria deberá producir $229.5374$ y servicios deberá producir $274.7331$ a fin de satisfacer las demandas finales proyectadas en tres años.

d) Conociendo los nuevos valores brutos de producción podemos armar la tabla usando que

$$a^*{}_{ij} = \frac{b^*{}_{ij}}{x^*{}_j}$$

Como la matriz $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ no varía entonces $a^*{}_{ij} = a_{ij}$

Podemos colocar en la tabla los datos que ya tenemos

$X^*$ y $D^*$ y calcular los $b^*{}_{ij}$

| | Usuario | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| PRODUCTOR | Agricultura | industria | Servicios | Demanda Final | Producción Total |
| Agricultura | 23.3452 | 45.90748 | 27.47331 | 20 | 116.7260 |
| Industria | 46.6904 | 22.95374 | 109.8934 | 50 | 229.5374 |
| Servicios. | 35.0178 | 114.7687 | 54.94662 | 70 | 274.7331 |
| Insumos de mano de obra. | 11.6726 | 45.90748 | 82.41993 | | |
| Consumo total | 116.7260 | 229.5374 | 274.7331 | | |

$$b^*{}_{11} = (0.2)(116.7260) = 23.3452$$
$$b^*{}_{12} = (0.2)(229.5374) = 45.90748$$
$$b^*{}_{13} = (0.1)(274.7331) = 27.47331$$

Obsérvese que al sumar los valores del primer renglón no es igual al valor correspondiente de la producción total:

Así: 23.3452+45.90748+27.47331+20 = 116.72599 $\neq 116.7260$

El error se debe a las aproximaciones numéricas al calcular la matriz de los coeficientes directos e indirectos es decir al calcular la matriz $(I - A)^{-1}$

Para calcular los nuevos insumos primarios. Por ejemplo en el caso de los servicios.

Se tiene: $274.7331 - (54.94662 + 109.89324 + 27.47331) = 82.41993$

O bien $\frac{60}{200}(274.7331)$=82.41993

Para aplicaciones reales es bueno detectar las fuentes de errores numéricas, para determinar que tan grave es el error, por lo que se requieren conceptos de Análisis Numérico.

**A manera de conclusión:**

Una de las ventajas del modelo de insumo producto: obliga a considerar explícitamente el problema de la interdependencia entre los sectores productivos. Esta relación de compra y venta entre los sectores queda sintetizada en la tabla de insumo producto.

El modelo de insumo producto permite solucionar problemas que resultan de la dinámica misma a propósito de la interdependencia de los sectores económicos, tales como el poder calcular lo que debe producir cada sector para poder satisfacer las demandas finales proyectadas el hecho de prever estos aumentos de producción si el cambio de uno obliga a cambios en la producción de los otros, Observe que la industria que tiene una demanda mayor de sus productos no solo tiene que aumentar su producción para cubrir su propia demanda, sino que también debe producir para que los otros sectores puedan aumentar la suya y brindarle los insumos que necesita.

El modelo de insumo Producto tiene necesariamente que ajustarse a ciertos supuestos básicos se supone que no ocurrirán cambios que afecten la estructura de producción de los sectores, visto de otra manera se supone que la Matriz de los coeficientes técnicos $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ es siempre la misma, aunque cambie la demanda final. En la práctica estas matrices varían por distintos motivos como adelantos tecnológicos, aparición de nuevos sectores o desaparición de otros, etc.

Para los estudiantes de la Facultad de ciencias económicas y administrativas de Cecar, el aprendizaje de las Matemáticas resulta más llamativo y significativo cuando se aplica a situaciones de su contexto.

Se Obtuvo la gran satisfacción de conseguir una ganancia adicional al objetivo principal de la practica y fue "motivar" a los estudiantes a practicar pasos del proceso de investigación tales como la realización y análisis de encuestas, consulta y escogencia bibliográfica, elaboración de: objetivos , síntesis, justificación , conclusiones , etc.

**Teoría de Juegos.**

Para abordar esta temática el estudiante y tutor pueden visitar los siguientes sitios web

http://www.monografias.com/trabajos5/teorideju/teorideju.shtml

http://www.elblogsalmon.com/conceptos-de-economia/que-es-la-teoria-de-juegos

http://www.ecpunr.com.ar/Docs/Teoria_de_Juegos%20II.pdf

http://search.proquest.com/docview/334342975?accountid=34487

http://search.proquest.com/docview/467248267?accountid=34487

http://search.proquest.com/docview/928099069?accountid=34487

http://search.proquest.com/docview/1020166523?accountid=34487

http://search.proquest.com/docview/925803692?accountid=34487

## RESUMEN

- Un sistema lineal está formado por m ecuaciones lineales y n variables. Si el número de ecuaciones es igual al número de variables, se dice que el sistema es cuadrado.

- Un sistema lineal, puede tener una única solución, infinitas soluciones o ninguna solución.

Los sistemas 2x2 y 3x3 pueden ser resueltos por el método grafico, que consiste en determinar el punto o los puntos de intersección de las rectas que representan las ecuaciones, pero es poco práctico cuando la solución involucra números no enteros. Para una mejor precisión es conveniente el uso de métodos algebraicos (Igualación, Sustitución y  Eliminación) o métodos matriciales

**EVALUACION**

Exprese como producto de matrices y resuelva los sistemas:

**1**. $\begin{cases} 8x - 12y + 30 = 0 \\ 18x + 15y - 3 = 0 \end{cases}$ **2**. $\begin{cases} 2x + 3y = -1 \\ -x + 2y = 3 \end{cases}$ **3**. $\begin{cases} 4x + 5y = -2 \\ 3x - \ \ y = \ \ 8 \\ 5x - 2y + z = -3 \end{cases}$

**4**. $\begin{cases} 2x - 3y + 2z = 1 \\ 3x + 2y - 3z = 2 \\ 5x - 2y + z = -3 \end{cases}$ **5**. $\begin{cases} 4x + 2y - 2 = 0 \\ x + 3y + 2z = 5 \\ 6y + 5z - 10 = 0 \end{cases}$ **6**. $\begin{cases} 4x + 2y - 3z = -11 \\ 2x + 5y - 4 = 0 \\ 4y - 2z - 6 = 0 \end{cases}$

**7.** Resuelva por reducción Gauss-Jordan el sistema: $\begin{matrix} x - y - 3z = -4 \\ 2x - y - 4z = -7 \\ x + y - z = -2 \end{matrix}$

**8.** Resuelva aplicando la regla de CRAMER el sistema anterior.

**9.** Resuelva los siguientes sistemas lineales**:**

**a.** $\begin{matrix} 2x - 3y + 2z = 1 \\ 3x + 2y - 3z = 2 \\ 5x - 2y + z = -3 \end{matrix}$ **b.** $\begin{matrix} 2x + y + z = -1 \\ 3x + 2y - 5z = -2 \\ x + y - 3z = -3 \end{matrix}$

**10.** Resuelve los siguientes problemas

**a)** En una colecta se recaudaron \$ 63.600 en monedas de \$200, \$500 y \$1.000. ¿cuántas monedas de cada clase se colectaron si el total de monedas fue de 123, y además, la suma de las monedas de \$200 con las monedas de \$500 fue de \$30.600?

**b)** Un total de \$35.000.000 fueron invertidos a tres tasas de interés: 7,8 y 9%. El interés en el primer año fue de \$ 2.830.000, que no se reinvirtió. El segundo año la cantidad originalmente invertida al 9% devengó un 10% las otras tasas permanecieron iguales. El interés total en el segundo año fue de \$2.960.000. ¿cuánto fue invertido a cada tasa?

**c)** La producción semanal en litros de leche y arrobas de queso de 3 lotes de ganado está indicada en la tabla. ¿cuánto debe pagarse por el pastaje semanal de cada vaca, en cuanto se debe vender cada litro de leche y cada arroba de queso para que la ganancia semanal sea l indicada en la tabla?

| Numero de vacas | Litros de leche | Arrobas de queso | Ganancia semanal |
|---|---|---|---|
| 10 | 600 | 8 | $3200 |
| 15 | 800 | 10 | $2600 |
| 8 | 400 | 6 | $1400 |

## UNIDAD 3

## PRESENTACION

El concepto de límite parece ser uno de los que presentan mas dificultad en matemática. La idea de aproximarse a un punto o a un valor tan cerca como se especifique, y aun así no alcanzarlo nunca no es fácil desde el punto de vista intuitivo. Sin embargo, de hecho, conceptos del tipo de limites matemático se utilizan con frecuencia en razonamientos y disertaciones ajenos a las matemáticas. Por ejemplo, la producción máxima teórica de una maquina industrial o de una fábrica, es un “limite”, es decir, el rendimiento ideal (o limite) que en la práctica nunca es alcanzable, pero al cual es posible aproximarse arbitrariamente. El concepto matemático de límite es fundamental para la comprensión del cálculo diferencial, y se analizará enseguida con ciertos detalles en su parte intuitiva. También se consideran las propiedades de los límites, que se emplearan en el cálculo de estos y la aplicación para determinar la continuidad o discontinuidad de una función real en un punto determinado

**NOMBRE: LÍMITE Y CONTINUIDAD**

**PREGUNTA PROBLEMA**

¿Por qué es importante conocer el concepto de límite y continuidad antes de abordar el concepto de Derivada de una función?

**COMPETENCIAS ESPECÍFICAS**

- Reconoce el concepto de límite de funciones.

- Aplica las propiedades de los límites en el cálculo del límite de una función real.
- Calcula el límite indeterminado de una función real.
- Calcula límites al infinito de funciones reales.
- Determina la continuidad o discontinuidad de una función real.
- Establece diferencia entre los tipos de discontinuidad de las funciones reales.
  .

**SABERES**

3.1 Definición
3.2 Propiedades de los límites
3.3 Limites indeterminados
3.4 Limites al infinito y limites infinitos.

## DINAMICA PARA CONSTRUIR EL CONOCIMIENTO

### ACTIVIDAD PREVIA (Trabajo Individual)

"Utilice su calculadora para completar la tabla. Use los resultados para estimar los límites dados"[10]

1. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{3x^2 - x - 2}{x - 1}$

| X | 0.9 | 0.99 | 0.999 | 1.0001 | 1.001 | 1.01 | 1.1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | | | | | | | |

2. $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^2 - 9}{x + 31}$

| X | -3.1 | -3.01 | -3.001 | -3.0001 | -2.999 | -2.99 | -2.9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | | | | | | | |

Selecciona la respuesta correcta

3. El limite de una función existe si

a) Existe el limite por la derecha
b) Existe el límite por la derecha y por la izquierda.
c) Existe el límite por la derecha y por la izquierda y son iguales.
d) Existe el límite por la derecha y por la izquierda y son diferentes.

4. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ es igual a:

a) 0
b) 2
c) $\infty$
d) 4

5. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x+3} - 2}{x + 1}$ es igual a:

a) 0
b) 2
c) $\dfrac{1}{4}$
d) $-\infty$



[10] LARSON-HOSTETLER, Cálculo. Bogotá: McGrawHill 1994, p. 42

**ACTIVIDAD GRUPAL**

1. Reunidos en CIPAS, lea nuevamente la Unidad 3.
2. Socialicen los resúmenes elaborados de manera individual e independiente.
3. Socialicen las respuestas de la sección Atrévete a opinar, que respondieron de manera individual.
4. Socialicen las respuestas de las actividades, que respondieron de manera individual.
5. Desarrollen los ejercicios que se encuentra al final de la Unidad 3 y discútanlos en el grupo de estudios. Estos ejercicios deben ser socializados en la sesión junto con todos los compañeros de grupo y entregados al tutor.

## SABERES Y ACTIVIDADES

### 3. LÍMITE Y CONTINUIDAD

### 3.1 DEFINICION

El concepto matemático de límite es fundamental para la comprensión del cálculo diferencial, sin embargo, es bueno que tengas una idea intuitiva de lo que es el límite de una función real, que es el que nos ocupa en esta sección.

**<u>Ejemplo</u>** Consideremos la función f(x) = $\frac{x^2-9}{x-3}$ y determinemos a que valor se aproxima f(x) cuando x toma valores cercamos a 3

Valores a la izquierda de 3

| X | 2,5 | 2,7 | 2,9 | 2.95 | 2,99 | 2,995 | 2,999 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | 5.5 | 5.7 | 5.9 | 5,95 | 5,99 | 5,995 | 5.999 |

Valores a la derecha de 3

| X | 3,5 | 3,2 | 3,1 | 3,05 | 3,01 | 3,005 | 3,001 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| F(x) | 6.5 | 6.2 | 6,1 | 6,05 | 6,01 | 6,005 | 6,001 |

**A** medida que **x** toma valores más cercamos a 3, se observa que los valores de f(x) se van acercando a 6. Esto significa que cuando x tiende a 3, entonces f(x) tiende a 6, aunque f(3) no esté definido.

$$\boxed{f(3)=\frac{3^2-9}{3-3}=\frac{9-9}{3-3}=\frac{0}{0},\quad \textit{no definido}}$$

La anterior es una idea intuitiva de lo que es el límite de una función en un punto dado y se simboliza así:

Cuando x $\longrightarrow$ 3, f(x) $\longrightarrow$ 6 o también $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=6$

**Ejemplo** Consideremos la función g(x) = $x^2$ - 2 y determinemos a que valor se acerca g(x) cuando x toma valores muy cercanos a 2.

Valores a la Izquierda de 2

| X | 1 | 1,5 | 1,8 | 1,9 | 1,95 | 1,99 | 1,999 | 1,9999 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| G(x) | -1 | 0,25 | 1.24 | 1,61 | 1,802 | 1,960 | 1,996 | 1,999 |

Valores a la derecha de 2

| X | 3 | 2,5 | 2,2 | 2,1 | 2,05 | 2,01 | 2,001 | 2,0001 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| G(x) | 7 | 4,25 | 2,84 | 2,41 | 2,202 | 2,04 | 2,004 | 2,0004 |

Observa que en la medida en que x toma valores cada vez más cercamos a 2, g(x) se acerca a 2; que para este caso es igual a g(2).

La anterior se simboliza como

$\lim\limits_{x\to 2}(x^2-2)=2$, es decir g(x) $\longrightarrow$ 2 cuando x $\longrightarrow$ 2

**DEFINICIÓN:** Sea f(x) una función que está definida en todos los valores de x cercanos a un valor **a,** con excepción posible de **a**. Se dice que **L** es el límite de f(x) cuando x tiende a **a**, si la diferencia entre f(x) y **L** puede hacerse tan pequeña como se quiera con sólo restringir a **x** a estar lo suficientemente cerca de **a**. Simbólicamente escribimos

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x)=l}$$

Los ejemplos anteriores y la definición se han hecho específicamente para el caso en que tanto x como f(x) tiendan a un valor finito (un número real). Sin embargo es posible que x o f(x) o las dos lleguen a ser arbitrariamente grandes o pequeñas.

http://www.youtube.com/watch?v=Uf9QXgiqfdo

**Ejemplo** Consideremos la función f(x) = $\frac{1}{x-1}$ y observemos el comportamiento de f cuando x toma valores cercamos a 1.

Valores a la izquierda de 1

| X | 0 | 0,5 | 0,8 | 0,9 | 0,95 | 0,99 | 0,999 | 0,9999 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | -1 | -2 | -5 | -10 | -20 | -100 | -1000 | -10.000 |

Valores a la derecha de 1

| X | 2 | 1,5 | 1,2 | 1,1 | 1,01 | 1,001 | 1,0001 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | 1 | 2 | 5 | 10 | 100 | 1000 | 10000 |

Observa en las tablas que a medida que nos acercamos a 1 por la izquierda, f(x) toma valores cada vez más pequeños, tendiendo a $-\infty$. En cambio cuando nos acercamos a 1 por la derecha, f(x) toma valores cada vez más grandes, tendiendo a $\infty$. Podemos entonces decir que $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ no existe.

Observa el comportamiento de la función en la figura 4.1

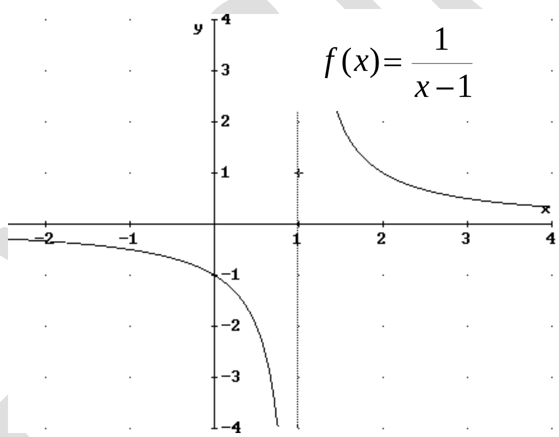



Figura 4.1

**<u>Ejemplo:</u>** Consideremos la función f(x) = [x], que asigna a cada número real **x** su parte entera **n** ($n \leq x < n+1$), y analicemos su comportamiento cuando x toma valores cercanos a 2.

Valores a la izquierda de 2

| x | 1,5 | 1,7 | 1,8 | 1,9 | 1,95 | 1,99 | 1,999 | 1,9999 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Observamos que en la medida en que el valor de x se acerca a 2 por la izquierda, f(x) = 1, lo cual simbolizamos como

$$\lim_{x \to 2^-} [x] = 1$$

Valores a la derecha  de 2

| X | 2,6 | 2,5 | 2,2 | 2,1 | 2,01 | 2,001 | 2,0001 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |

Vemos que en la medida en que los valores de x se acercan a 2 por la derecha, f(x) = 2. Esto es:

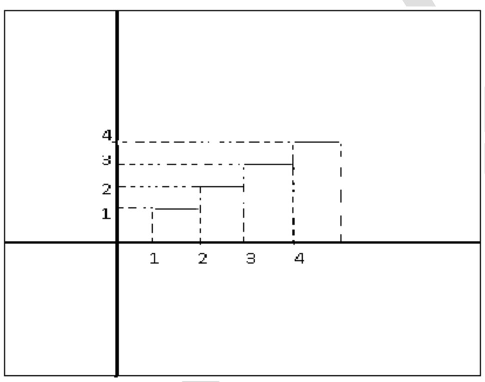
$$\lim_{x \to 2^+} [x] = 2$$

Luego $\lim_{x \to 2} [x]$ no existe porque f(x) toma valores distintos cuando x toma valores cercanos a 2 por la derecha y por la izquierda.

En general los límites

$$\lim_{x \to a^-} f(x) \quad y \quad \lim_{x \to a^+} f(x)$$

Son llamados Límites laterales o simplemente Límite por la izquierda  y  Límite por la derecha




Para que  el límite de una función exista, se requiere que el Límite por la izquierda y el Límite por la derecha sean iguales.

El límite de una función, en muchos casos, puede obtenerse directamente con solo remplazar la variable x por el valor al que tiende.

**Ejemplo**  El límite cuando $x \to 2$ de $g(x) = x^2 - 2$, puede obtenerse rápidamente con sólo sustituir a x por 2 en la función, es decir,

$$\lim_{x\to 2}(x^2-2)=(2)^2-2=4-2=2$$

**Ejemplos**

**i)** $\lim_{x\to -2}(3x^2-5x+3)=3(-2)^2-5(-2)+3=12+10+3=25$

**ii)** $\lim_{x\to 5}(x^3-7x^2+4x+1)=(5)^3-7(5)^2+4(5)+1=125-175+20+1=-29$

**iii)** $\lim_{x\to \frac{1}{2}}(3x^2+5x-3)=3(\tfrac{1}{2})^2+5(\tfrac{1}{2})-3=3(\tfrac{1}{4})+\tfrac{5}{2}-3=\dfrac{1}{4}$

## 3.2 PROPIEDADES DE LOS LÍMITES

Las siguientes propiedades son útiles para evaluar el límite de una función real, y son derivadas de la definición.

"Si $\lim_{x\to a} f(x)=A\ \ y\ \ \lim_{x\to a} g(x)=B$ y k es una constante, se cumple que:

1) El límite de una constante es igual a la misma constante.

$$\boxed{\lim_{x\to a} K=K}$$

**Ejemplos**

$\lim_{x\to 5}(-8)=-8$ $\qquad$ $\lim_{x\to 3}4{,}5=4{,}5$ $\qquad$ $\lim_{x\to 0}\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{3}$

2) El límite de una constante por una función, es igual a la constante multiplicada por el límite de la función.

$$\boxed{\lim_{x\to a}Kf(x)=K\lim_{x\to a}f(x)=KA}$$

**Ejemplo**

$\lim_{x\to 2}4x^2=4\lim_{x\to 2}x^2=4(4)=16$ $\qquad$ $\lim_{x\to -1}-5x^3=-5\lim_{x\to -1}x^3=-5(-1)^3=5$

3) El límite de una suma o diferencia de dos o más funciones es igual a la suma o diferencia de los límites de cada función.

$$\boxed{\lim_{x\to a}\left[f(x)\pm g(x)\right]=\lim_{x\to a} f(x)\pm \lim_{x\to a} g(x)=A\pm B}$$

**Ejemplos**

$$i)\ \lim_{x\to 2}\left[(3x+5)+(x^2-1)\right]=\lim_{x\to 2}(3x+5)+\lim_{x\to 2}(x^2-1)=(11)+(3)=14$$

$$ii)\ \lim_{x\to -3}\left[(2x^3-x)-(x^2+6)\right]=\lim_{x\to -3}(2x^3-x)-\lim_{x\to -3}(x^2+6)=-51-15=-66$$

4) El límite del producto de dos funciones es igual al producto de los limites de cada función.

$$\boxed{\lim_{x\to a}\left[f(x).g(x)\right]=\left[\lim_{x\to a} f(x)\right]\left[\lim_{x\to a} g(x)\right]=AB}$$

**Ejemplos**

$$i)\ \lim_{x\to 2}\left[(3x+5)(x^2-1)\right]=\left[\lim_{x\to a}(3x+5)\right]\left[\lim_{x\to a}(x^2-1)\right]=(11)(3)=33$$

$$ii)\ \lim_{x\to 0}\left[(x^3-x^2+3)(2x+4)\right]=\left[\lim_{x\to 0}(x^3-x^2+3)\right]\left[\lim_{x\to 0}(2x+4)\right]=(3)(4)=12$$

5) El límite del cociente de dos funciones es igual al cociente de los límites de cada función; siempre que el límite del divisor sea diferente de cero.

$$\boxed{\lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]=\frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}=\frac{A}{B},\quad si\, B\neq 0}$$

**Ejemplos**

$$1)\ \lim_{x\to 2}\left[\frac{3x+5}{x^2-1}\right]=\frac{\lim\limits_{x\to 2}(3x+5)}{\lim\limits_{x\to 2}(x^2-1)}=\frac{11}{3}$$

$$2)\ \lim_{x\to 3}\left[\frac{x^3+5x}{2x^2-4}\right]=\frac{\lim\limits_{x\to 3}(x^3+5x)}{\lim\limits_{x\to 3}(2x^2-4)}=\frac{42}{14}=3$$

6) El límite de una función elevada a una potencia n es igual a la potencia n del límite de la función.

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)\right]^n = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^n = A^n$$

**Ejemplos**

1) $\lim_{x\to 1}(2x^2-3x+4)^6 = \left[\lim_{x\to 1}(2x^2-3x+4)\right]^6 = (3)^6 = 729$

2) $\lim_{x\to -2}(x^3-3x^2+6)^3 = \left[\lim_{x\to -2}(x^3-3x^2+13)\right]^3 = (-7)^3 = -343$

7) El límite de la raíz n - ésima de una función es igual a la raíz n-ésima del límite de la función.”[11]

$$\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)} = \sqrt[n]{A}$$

**Ejemplo**

$$\lim_{x\to 2}\sqrt[3]{5x^2+9x-11} = \sqrt[3]{\lim_{x\to 2}(5x^2+9x-11)} = \sqrt[3]{5(2)^2+9(2)-11}$$

$$= \sqrt[3]{20+18-11} = \sqrt[3]{27} = 3$$

http://www.youtube.com/watch?v=KsFyrL1a2j4

## 3.3 LIMITES INDETERMINADOS

Puede suceder que al aplicar la propiedad 5, correspondiente al límite de un cociente, se obtenga un resultado de la forma $\frac{0}{0}$ que no tiene significado; diciéndose entonces que el límite es indeterminado.

Para el cálculo de límites indeterminados de la forma $\frac{0}{0}$, se divide numerador y denominador entre una expresión que en el límite sea igual a cero. Esta

[11] WEBER,Jean. Matemáticas para Administración y Economía. México: Ed. Harla 1982, p. 163

expresión se determina mediante Factorización de las funciones o el producto por conjugadas si las funciones contienen radicales.

**Ejemplo:** Calcular

a) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2-9}{x-3}$  b) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^3+8}{x^2+3x+2}$  c) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2-5x+4}{1-x^2}$

d) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2-6x+9}{x^2-3x}$  e) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2-4}{2x^2+8x+8}$

**Solución:**

a) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2-9}{x-3} = \dfrac{(3)^2-9}{3-3} = \dfrac{9-9}{0} = \dfrac{0}{0}$ (**I**ndeterminado).

Factorizamos las expresiones del numerador y el denominador:

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2-9}{x-3} = \lim_{x \to 3} \frac{(x+3)\cancel{(x-3)}}{\cancel{(x-3)}} = \lim_{x \to 3} (x+3) = 6$$

b) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^3+8}{x^2+3x+2} = \dfrac{(-2)^3+8}{(-2)^2+3(-2)+2} = \dfrac{-8+8}{4-6+2} = \dfrac{0}{0}$ (**I**ndeterminado).

Factorizamos las expresiones del numerador y el denominador:

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^3+8}{x^2+3x+2} = \lim_{x \to -2} \frac{\cancel{(x+2)}(x^2-2x+4)}{\cancel{(x+2)}(x+1)} = \lim_{x \to -2} \frac{x^2-2x+4}{x+1} = \frac{(-2)^2-2(-2)+4}{-2+1} = -12$$

c) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2-5x+4}{1-x^2} = \dfrac{(1)^2-5(1)+4}{1-(1)^2} = \dfrac{1-5+4}{1-1} = \dfrac{0}{0}$ (**I**ndeterminado).

Factorizamos las expresiones del numerador y el denominador:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2-5x+4}{1-x^2} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-4)(x-1)}{(1+x)(1-x)} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-4)\cancel{(x-1)}}{-(1+x)\cancel{(x-1)}} = \lim_{x \to 1} \frac{x-4}{-(1+x)}$$

$$= \frac{1-4}{-(1+1)} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}$$

d) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2-6x+9}{x^2-3x} = \dfrac{9-18+9}{9-9} = \dfrac{0}{0}$ (Indeterminado).

Factorizamos las expresiones del numerador y el denominador:

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-6x+9}{x^2-3x} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)\cancel{(x-3)}}{x\cancel{(x-3)}} = \lim_{x\to 3} \frac{x-3}{x} = \frac{3-3}{3} = \frac{0}{3} = 0$$

e) $\lim_{x\to -2} \dfrac{x^2-4}{2x^2+8x+8} = \dfrac{4-4}{8-16+8} = \dfrac{0}{0}$ (Indeterminado).

Factorizamos las expresiones del numerador y el denominador:

$$\lim_{x\to -2} \frac{x^2-4}{2x^2+8x+8} = \lim_{x\to -2} \frac{(x+2)(x-2)}{2(x^2+4x+4)} = \lim_{x\to -2} \frac{\cancel{(x+2)}(x-2)}{2(x+2)\cancel{(x+2)}}$$

$$= \lim_{x\to -2} \frac{x-2}{2(x+2)} = \frac{-2-2}{2(2-2)} = \frac{-4}{0} = \infty$$

Este límite no existe por que el cociente $\frac{-4}{0}$ no está definido.

En los ejercicios anteriores se ha aplicado la Factorización. Veamos algunos ejemplos de aplicación del producto por conjugados

**Ejemplo** Calcular

a) $\lim_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{2x+5}-3}{x^2+17x-38}$ b) $\lim_{x\to -3} \dfrac{x^2-9}{2-\sqrt{1-x}}$

**Solución:**

a) $\lim_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{2x+5}-3}{x^2+17x-38} = \dfrac{\sqrt{2(2)+5}-3}{(2)^2+17(2)-38} = \dfrac{\sqrt{9}-3}{4+34-38} = \dfrac{0}{0}$ (Indeterminado).

Como la expresión del numerador contiene radicales, procedemos a multiplicar tanto numerador como denominador por la conjugada del numerador para determinar el factor común que hace cero tanto la expresión del numerados como la del denominador.

$$\frac{(\sqrt{2x+5}-3)(\sqrt{2x+5}+3)}{(x^2+17x-38)(\sqrt{2x+5}+3)} = \frac{(\sqrt{2x+5})^2-(3)^2}{(x+19)(x-2)(\sqrt{2x+5}+3)} = \frac{2x+5-9}{(x+19)(x-2)(\sqrt{2x+5}+3)}$$

$$\frac{2x-4}{(x+19)(x-2)(\sqrt{2x+5}+3)} = \frac{2\cancel{(x-2)}}{(x+19)\cancel{(x-2)}(\sqrt{2x+5}+3)} = \frac{2}{(x+19)(\sqrt{2x+5}+3)}$$

Luego, $\lim_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{2x+5}-3}{x^2+17x-38} = \lim_{x\to 2} \dfrac{2}{(x+19)(\sqrt{2x+5}+3)} = \dfrac{2}{(2+19)(\sqrt{2(2)+5}+3)}$

$$= \frac{2}{(21)(\sqrt{9}+3)} = \frac{2}{(21)(6)} = \frac{1}{63}$$

b) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x^2-9}{2-\sqrt{1-x}} = \dfrac{(-3)^2-9}{2-\sqrt{1-(-3)}} = \dfrac{9-9}{2-\sqrt{4}} = \dfrac{0}{0}$ (Indeterminado).

Como la expresión del denominador contiene radicales, procedemos a multiplicar tanto numerador como denominador por la conjugada del denominador, para determinar el factor común que hace cero ambas expresiones.

$$\frac{x^2-9}{2-\sqrt{1-x}} = \frac{(x^2-9)(2+\sqrt{1-x})}{(2-\sqrt{1-x})(2+\sqrt{1-x})} = \frac{(x-3)(x+3)(2+\sqrt{1-x})}{2^2-(\sqrt{1-x})^2}$$

$$= \frac{(x-3)(x+3)(2+\sqrt{1-x})}{4-(1-x)} = \frac{(x-3)\cancel{(x+3)}(2+\sqrt{1-x})}{\cancel{3+x}} = (x-3)(2+\sqrt{1-x})$$

Luego, $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x^2-9}{2-\sqrt{1-x}} = \lim\limits_{x\to -3}(x-3)(2+\sqrt{1-x}) = (-3-3)(2+\sqrt{4}) = (-6)(4) = -24$

http://www.youtube.com/watch?v=8V63b4WxAKY

### 3.4 "LÍMITES AL INFINITO Y LÍMITES INFINITOS"[12]

**Si los valores de una función f(x) se aproximan a un valor L para todos los valores positivos de x que sean suficientemente grandes, se dice que f(x) se aproxima a L como limite cuando x llega a ser "positivamente infinita", es decir, crece indefinidamente y lo notaremos como:**

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L \qquad o\ tambien \qquad f(x)\to L\ \ cuando\ x\to\infty$

**La expresión $x\to\infty$ significa que x crece indefinidamente. El símbolo $\infty$ se considera como si fuese un numero y por conveniencia se omite el signo +.**

<u>**Ejemplo**</u>

**Si** $f(x) = 2+\dfrac{3}{x}$ $entonces$ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 2$**, ya que por ejemplo,**

[12] WEBER,Jean. Matemáticas para Administración y Economía. México: Ed. Harla 1982, p. 159

$f(1)=5, \quad f(3)=3, \quad f(30)=2{,}1 \quad f(300)=2{,}01 \quad f(3000)=2{,}001$
$f(3000000)=2.000001 \quad f(3000000000\,0)=2{,}0000000001$

**En forma similar, si x decrece indefinidamente, es decir, se hace "negativamente infinita", el límite queda expresado como:**

$$\lim_{x\to -\infty} f(x)=L \qquad o\ tambien \quad f(x)\to L\ \ cuando\ x\to -\infty$$

<u>Ejemplo</u>

**Si** $f(x)=2+\dfrac{3}{x}$ $entonces$ $\lim_{x\to -\infty} f(x)=2$**, ya que por ejemplo,**

$f(-1)=-1, \quad f(-3)=1, \quad f(-30)=1{,}9 \quad f(-300)=1{,}99 \quad f(-3000)=1{,}999$
$f(-3000000)=1.999999 \quad f(-3000000000\,0)=1{,}9999999999$

**Si la función f(x) es mayor que un numero positivo suficientemente grande para todos los valores de** x **que estén suficientemente próximos a una constante** a, **con** x **diferente de** a**, se dice que f(x) se hace positivamente infinita, es decir, crece indefinidamente e indicamos:**

$$\lim_{x\to a} f(x)=\infty \quad o\ tambien \quad f(x)\to\infty\ \ cuando\ \ x\to a$$

**En forma similar, si la función f(x) decrece indefinidamente, es decir, se hace "negativamente infinita", cuando** x **toma valores suficientemente próximos a** a **indicamos:**

$$\lim_{x\to a} f(x)=-\infty \quad o\ tambien \quad f(x)\to -\infty\ \ cuando\ \ x\to a$$

<u>Ejemplos</u>

**a)** $\lim_{x\to 1} \dfrac{2}{(x-1)^2}=\infty$ **b)** $\lim_{x\to 1} \dfrac{2}{1-x^2}=-\infty$

**Si la función f(x) crece indefinidamente cuando x se hace positivamente grande, se indica con la notación:**

$$\lim_{x\to \infty} f(x)=\infty \quad o\ tambien \quad f(x)\to\infty\ \ cuando\ \ x\to\infty$$

**Si la función f(x) decrece indefinidamente cuando x se hace positivamente grande, se indica con la notación:**

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty \quad o\ tambien \quad f(x) \to -\infty \ \ cuando \ \ x \to \infty$$

**Si la función f(x) crece indefinidamente cuando x se hace “negativamente infinita”, se indica con la notación:**

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty \quad o\ tambien \quad f(x) \to \infty \ \ cuando \ \ x \to -\infty$$

**Si la función f(x) decrece indefinidamente cuando x se hace “negativamente infinita”, se indica con la notación:**

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \quad o\ tambien \quad f(x) \to -\infty \ \ cuando \ \ x \to -\infty$$

**<u>Ejemplos:</u>**

$a)\ \lim_{x\to\infty} 2x^2 - 5 = \infty$

$b)\ \lim_{x\to-\infty} 2x^2 - 5 = \infty$

$c)\ \lim_{x\to\infty} 2x - 5 = \infty$

$d)\ \lim_{x\to-\infty} 2x - 5 = -\infty$

$e)\ \lim_{x\to\infty} x^4 + x = \infty$

$f)\ \lim_{x\to-\infty} x^3 + x = -\infty$

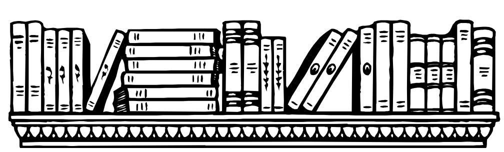
[http://www.youtube.com/watch?v=FOhTPFwwgjU](http://www.youtube.com/watch?v=FOhTPFwwgjU)

ACTIVIDAD 3.1

**Calcule los siguientes límites**

**1.** $\lim_{x\to3} \dfrac{x^2 - 7x + 12}{1 - \sqrt{x-2}}$

**2.** $\lim_{x\to3} \dfrac{x^3 - 27}{x^2 - 8x + 15}$



**3.** $\lim_{x\to2} \dfrac{\sqrt{2x} - 2}{x^2 - 4}$

**4.** $\lim_{x\to0} = \dfrac{x^2 - 5x}{3x^2 - x}$

5. $\underset{x\to 2}{Lim}\ 3x^{-1}+2x^2-3$

6. $\underset{x\to -3}{Lim}\ \dfrac{x^3+27}{\sqrt{1-x}-2}$

7. $\underset{x\to 4}{lim}\ \dfrac{x^2+6x-40}{x^3-64}$

8. $\underset{x\to -1}{Lim}\dfrac{\sqrt{x+5}-2}{x^3+1}$

9. $\underset{x\to \infty}{Lim}\,x^2-x$

10. $\underset{x\to -\infty}{Lim}\,x^2-x$

11. $\underset{x\to 3}{Lim}\dfrac{1}{x^2-9}$

12. $\underset{x\to \infty}{Lim}\dfrac{5}{x+2}$

### 3.5 CONTINUIDAD

“Una función f(x) es continua, si su gráfica es una línea ininterrumpida, es decir, aquella que podemos trazar sin levantar la punta del lápiz del papel.

Matemáticamente, una función f(x) es continua en un punto **x** = a, si cumple las tres condiciones siguientes:

1. f(a) está definida
2. $\underset{x\to a}{Lim}\ f(x)$ existe
3. $\underset{x\to a}{Lim}\ f(x)$ = f(a)

Si una función no cumple una de estas condiciones, se dice que es discontinua en el punto a.

Dependiendo de las condiciones que no cumpla la función, la discontinuidad en un punto **x = a** se clasifica en:

1. **Discontinuida*d infinita***: Se presenta cuando f(a) no está definido y $\underset{x \to a}{Lim}\ f(x)$ no existe.

La gráfica de una función que presenta discontinuidad infinita es asintótica.

2. ***Discontinuidad finita***: Se presenta cuando f(a) está definida pero $\underset{x \to a}{Lim}\ f(x)$ no existe; aunque existan los limites por la derecha y por la izquierda y f(a) sea igual a uno de ellos.

La gráfica de una función con discontinuidad finita es escalonada (con salto o escalón).

2. ***Discontinuidad de punto faltante***: Se presenta cuando f(a) no está definido pero $\underset{x \to a}{Lim}\ f(x)$ existe."[13]

La gráfica de una función con discontinuidad de punto faltante es una línea que solo se interrumpe en dicho punto. Esta discontinuidad se puede eliminar definiendo $f(a) = \underset{x \to a}{Lim}\ f(x)$

http://www.youtube.com/watch?v=onyOpZBC8Rk

**Ejemplo:** Determine la continuidad de las funciones en el punto **x = 2**

**a)** f(x) = $x^3 - 4$ **b)** g(x) = $\frac{1}{x-2}$ **c)** h(x) = $[x]$ **d)** m(x) = $\frac{x^2 - 9x + 14}{x-2}$

**Solución:**

Verificamos cada una de las condiciones para cada función planteada.

a) 1. $f(2) = (2)^3 - 4 = 8 - 4 = 4$ (Definida)

[13] WEBER,Jean. Matemáticas para Administración y Economía. México: Ed. Harla 1982, p. 170

2. $\lim\limits_{x \to 2} (x^3 - 4) = (2)^3 - 4 = 4$ (Existe)

3. $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ = f(a)

Luego la función f(x) = $x^3$ - 4 es continua en x = 2

b) 1. g(2) = $\dfrac{1}{2-2}$ = $\dfrac{1}{0}$ (No definido)

2. $\lim\limits_{x \to 2} \left( \dfrac{1}{x-2} \right) = \dfrac{1}{2-2} = \dfrac{1}{0}$ (No existe)

La función g(x) = $\dfrac{1}{x-2}$ presenta discontinuidad infinita en x = 2. Su gráfica es asintótica como se muestra en la figura 4.2 a)

c) 1. h(2) = $[2]$ = 2 (mediante esta función se obtiene la parte entera de un número real)

2. $\lim\limits_{x \to 2^+} [x] = 2 \quad y \quad \lim\limits_{x \to 2^-} [x] = 1 \;, \quad Luego \quad \lim\limits_{x \to 2} \; No\ existe$

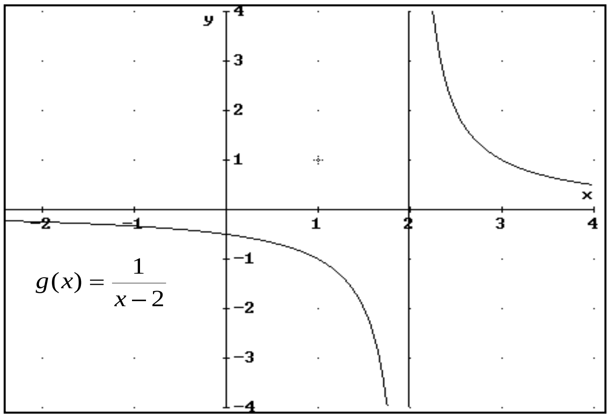
Así, la función h(x) presenta discontinuidad finita en x = 2. La gráfica se presenta en la figura 4. 2 b)

d) 1. f(2) = $\dfrac{(2)^2 - 9(2) + 14}{2-2}$ = $\dfrac{4 - 18 + 14}{0}$ = $\dfrac{0}{0}$ (no definido)

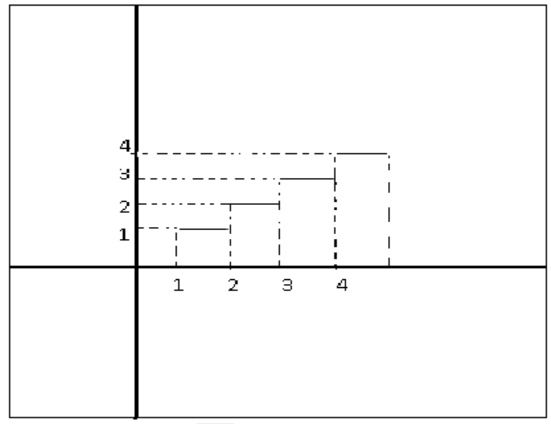
2. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 9x + 14}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x-7)(x-2)}{x-2}$ = 2 - 7 = -5

Luego la función presenta discontinuidad, de punto faltante en x = 2 para eliminar esta discontinuidad, la función debe definirse de la siguiente manera:

$$m(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 9x + 14}{x - 2}, & \text{para } x \neq 2 \\ -5, & \text{para } x = 2 \end{cases}$$




a)



b)

Figura 4.2

Una función se dice que es continua en un intervalo (a,b) si es continua en cada punto del intervalo.

Una función se dice que es continua, si es continua en cada uno de los puntos del dominio.

ACTIVIDAD 3.2

**Determine los valores de x para los cuales las siguientes funciones son discontinuas. Identifique los tipos de discontinuidades y exprese las definiciones apropiadas para eliminar las discontinuidades removibles (de punto faltante)**

**1.** $f(x) = \dfrac{2x-1}{x^2+4x+4}$

**2.** $f(x) = \dfrac{x^2+4}{x^2-x-2}$

**3.** $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x}{x^3 - x^2 + x}$

**4.** $f(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x - 2}$

**5.** $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 2}{x^2 + 27x + 50}$

**6.** $f(x) = \dfrac{2x^3 - 54}{x^2 - 9}$

**RESUMEN**

- Sea f(x) una función que está definida en todos los valores de x cercanos a un valor **a,** con excepción posible de **a**. Se dice que **L** es el límite de f(x) cuando x tiende a **a**, si la diferencia entre f(x) y **L** puede hacerse tan pequeña como se quiera con sólo restringir a **x** a estar lo suficientemente cerca de **a**.

- Para que el límite de una función exista, se requiere que el Límite por la izquierda y el Límite por la derecha sean iguales.
- Si $\underset{x \to a}{Lim} f(x) = A \ \ y \ \ \underset{x \to a}{Lim} g(x) = B$ y k es una constante, se cumple que:
- $\underset{x \to a}{Lim}\ K = K$
- $\underset{x \to a}{Lim} Kf(x) = K \underset{x \to a}{Lim} f(x) = KA$
- $\underset{x \to a}{Lim} \left[ f(x) \pm g(x) \right] = \underset{x \to a}{Lim} f(x) \pm \underset{x \to a}{Lim} g(x) = A \pm B$
- $\underset{x \to a}{Lim} \left[ f(x).g(x) \right] = \left[ \underset{x \to a}{Lim} f(x) \right] \left[ \underset{x \to a}{Lim} g(x) \right] = AB$
- $\underset{x \to a}{Lim} \left[ \dfrac{f(x)}{g(x)} \right] = \dfrac{\underset{x \to a}{Lim} f(x)}{\underset{x \to a}{Lim} g(x)} = \dfrac{A}{B}, \quad si\, B \neq 0$
- $\underset{x \to a}{Lim} \left[ f(x) \right]^n = \left[ \underset{x \to a}{Lim} f(x) \right]^n = A^n$
- $\underset{x \to a}{Lim} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\underset{x \to a}{Lim} f(x)} = \sqrt[n]{A}$

- Si al calcular un límite se obtiene un resultado de la forma $\frac{0}{0}$, que no tiene significado; se dice entonces que el límite es indeterminado.
- Matemáticamente, una función f(x) es continua en un punto **x** = a, si cumple las tres condiciones siguientes:
  1. f(a) está definida 2. $\lim_{x\to a} f(x)$ existe 3. $\lim_{x\to a} f(x)$ = f(a)



**EVALUACION**

1. **De los siguientes limites, es indeterminado**

   A. $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x+3}$ B. $\lim_{x\to -1}\frac{x-1}{x^3-1}$

   C. $\lim_{x\to 0}\frac{x^2-x}{x^3-x}$ D. $\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{x+1}}{x^3-1}$

2. **La función** $f(x)=\frac{3x^2-5x-2}{x^2-4}$ **es:**

   A. Continua. B. Discontinua de punto faltante.

   C. Discontinua infinita. D. Discontinua finita.

3. **La función** $f(x)=\frac{x^2-4}{3x^2-5x-2}$ **es discontinua en x igual a:**

   A. 2 y $-\frac{1}{3}$ B. -2 y $-\frac{1}{3}$

   C. 2 y $\frac{1}{3}$ D. - 2 y $\frac{1}{3}$

4. **Si** $\lim_{x\to a} f(x)=-\frac{3}{5}$**, entonces** $\lim_{x\to a} 5f(x)=-\frac{3}{5}$ **es igual a:**

   A. $-\frac{53}{5}$ B. $-\frac{15}{3}$

   C. $-3$ D. $3$

**5. Si** $f(x) = -g(x) \quad y \; \lim_{x \to a} f(x) = L$, **entonces**

A. $\lim_{x \to a}[f(x) + g(x)] = 2L$

B. $\lim_{x \to a}[f(x)g(x)] = 2L$

C. $\lim_{x \to a}[f(x) - g(x)] = 2L$

D. $\lim_{x \to a}[f(x) \div g(x)] = 1$

**UNIDAD 4**

**PRESENTACION**

El cálculo es la base del análisis matemático de los fenómenos de movimiento o de cambio. Debido a que todo varia o cambia en el universo, el cálculo tiene aplicaciones en todas las áreas de la investigación científica.
En administración y economía, el análisis Matemático trata con mucha frecuencia de cambios. Es por tanto el Cálculo y en particular su rama llamada Cálculo Diferencial, una gran herramienta de estudio en estas áreas del saber.

**NOMBRE: TOPICOS DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL**

**PREGUNTA PROBLEMA**
¿En qué ámbito de la administración de empresas es aplicable el concepto de derivada y antiderivada?

**COMPETENCIAS ESPECÍFICAS**

- Reconoce el concepto de incremento y tasa de cambio de una función
- Reconoce el concepto de derivada
- Aplica las reglas de derivación en el cálculo de la derivada de algunas funciones Reales.
- Calcula incrementos en el costo, el ingreso y las utilidades.
- Reconoce el concepto de antiderivada

**SABERES**

4.1 Incrementos y tasas

4.2 La derivada

4.3 Derivadas de orden superior

4.4 Aplicaciones a la Administración.

4.5 Antiderivadas

4.6 Calculo de la integral indefinida

4.7 Integral definida

**DINÁMICA PARA CONSTRUIR EL CONOCIMIENTO**

**ACTIVIDAD PREVIA (Trabajo Individual)**

1. Los sociólogos han estudiado la relación entre el ingreso y el numero de años de educación en miembros de un grupo de familias en particular, y han encontrado que una persona con x años de educación, puede esperar recibir un ingreso anual medio de y pesos, donde:

$$y = 12.000x^{5/2} + 13.900.000, \qquad 4 \le x \le 16$$

   a) Cuál es el incremento de los ingresos cuando los años de educación pasan de 7 a 10 años

   b) Encuentre la razón de cambio de los ingresos con respecto al número de años de educación.

2. Calcule la derivada de las siguientes funciones:

   a) $f(x) = 3x^3 - 5x^2 + 8x - 6$

   b) $f(x) = 3\sqrt{x^3} - 5\sqrt[3]{x^2} + 8x - 6$

   c) $f(x) = \dfrac{3x^3 - 5x^2 + 8x - 6}{x^2 - 5}$

   d) $f(x) = \left(3x^3 + 8x - 6\right)\left(4x^2 - x\right)$

   e) $f(x) = e^{2x^2 - 3}$

   f) $f(x) = Ln\left(3x^3 - 5x^2\right)$

g) $f(x) = x^2 e^{2x^2 - 3}$

**ACTIVIDAD GRUPAL**

1. Reunidos en CIPAS, lea nuevamente la Unidad 4.
2. Socialicen los resúmenes elaborados de manera individual e independiente.
3. Socialicen las respuestas de la sección Atrévete a opinar, que respondieron de manera individual.
4. Socialicen las respuestas de las actividades, que respondieron de manera individual.
5. Desarrollen los ejercicios que se encuentra al final de la Unidad 4 y discútanlos en el grupo de estudios. Estos ejercicios deben ser socializados en la sesión junto con todos los compañeros de grupo y entregados al tutor.

**SABERES Y ACTIVIDADES**

## 4. TOPICOS DE CALCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

### 4.3 INCREMENTOS Y TASAS

**DEFINICION:** "Sea **x** una variable con un primer valor $\mathbf{x_1}$ y un segundo valor $\mathbf{x_2}$, entonces, el cambio en el valor de x se denomina el incremento de x y se denota por $\Delta_x = x_2 - x_1$ "[14] (1)

Sea **y = f(x)** una variable que depende de **x**. Cuando **x** toma el valor $x_1$, **y** toma el valor $y_1 = f(x_1)$ y cuando **x** toma el valor $x_2$, **y** toma el valor $y_2 = f(x_2)$, así, el incremento de **y** es

$$\Delta_y = y_2 - y_1$$

$$\Delta_y = f(x_2) - f(x_1) \qquad (2)$$

**Ejemplo:** La función C(x) = 2.000 x + 750.000 expresa el costo total (en pesos) de producir **x** unidades mensuales de un producto. Calcule el incremento en el costo que corresponde a un incremento en la producción de 120 a 140 artículos mensuales.

**Solución:** El primer valor de **x** es $x_1 = 120$ y el segundo valor es $x_2 = 140$. El incremento de **x** es $\Delta_x = x_2 - x_1 = 140 - 120 = 20$

Los valores correspondientes de **C**, que es la variable dependiente, son:

$C_1 = 2.000\ (120) + 750.000 = 240.000 + 750.000 = 990.000$

$C_2 = 2.000(140) + 750.000 = 280.000 + 750.000 = 1.030.000$

[14] ARYA, j. Y LARDNER, R. Matemáticas Aplicadas a la admón. y a la Economía. Santafé de Bogota Prentice Hall 1994, p.476

El incremento de **C** es: $\Delta_C = C_2 - C_1 = 1.030.000 - 990.000 = 40.000$. Esto significa que los costos se incrementan en $40.000 mensuales cuando la producción se incrementa de 120 a 140 unidades.

En general, despejando $\mathbf{x}_2$ en la ecuación (1) y sustituyendo este valor en la ecuación (2) obtiene que:

$$\mathbf{x_2 = x_1 + \Delta_x}$$

$$\mathbf{\Delta_Y = f(x_1 + \Delta_x) - f(x_1)}$$

Dado que $\mathbf{x_1}$ puede ser cualquier valor de **x**, podemos suprimir el subíndice y

$$\boxed{\mathbf{\Delta_Y = f(x + \Delta_x) - f(x)}}$$

obtener:

**<u>Ejemplo:</u>** Dada la función $f(x) = x^2 - 1$, calcule $\Delta_Y$ si $x = 2$ y $\Delta_x = 0,3$

**<u>Solución</u>:** Sustituimos los valores de **x** y $\mathbf{\Delta_x}$ en la formula de $\Delta_Y$ para obtener

$$\begin{aligned}
\Delta_y &= f(x + \Delta_x) - f(x) \\
&= f(2 + 0,3) - f(2) \\
&= f(2,3) - f(2) \\
&= [(2,3)^2 - 1] - [(2)^2 - 1] \\
&= [5,29 - 1] - [4 - 1] \\
&= 4,29 - 3 = 1,29
\end{aligned}$$

Así, un incremento de 0,3 en el valor de **x** (recorrido), produce un cambio de 1,29 en el valor de **y** (elevación).

**<u>Ejemplo:</u>** Consideremos la función $\mathbf{y = x^2}$ y determinemos $\Delta_Y$ para valores generales de x y $\Delta_x$.

**<u>Solución:</u>**

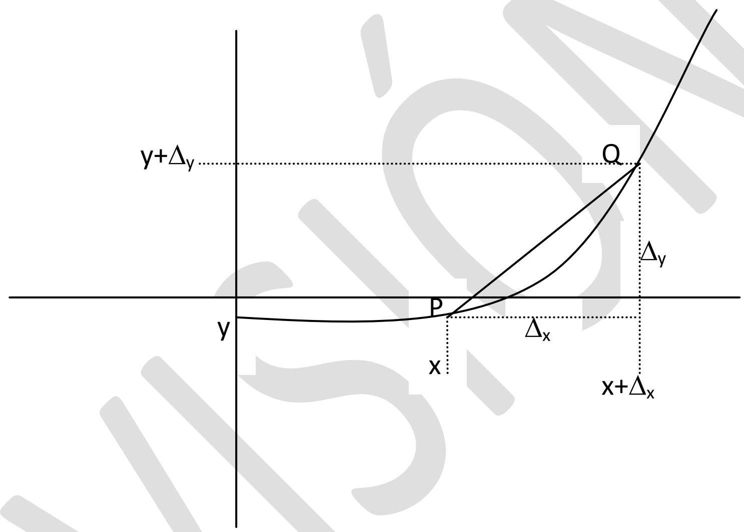
$$\begin{aligned}
\Delta_Y &= f(x+\Delta_x) - f(x) \\
&= (x + \Delta_x)^2 - x^2 \\
&= x^2 + 2x\,\Delta_x + (\Delta_x)^2 - x^2 \\
&= 2x\Delta_x + (\Delta_x)^2
\end{aligned}$$

**DEFINICION:** “La tasa de cambio promedio de una función f sobre un intervalo de x a x + $\Delta_x$ se define como la razón del incremento en y con respecto al incremento

$$\boxed{\frac{\Delta_y}{\Delta_x} = \frac{f(x+\Delta_x) - f(x)}{\Delta_x}}$$

en x, o sea

En la Figura, P y Q son dos puntos sobre la gráfica de la función y = f(x). $\Delta_y = f(x+\Delta_x) - f(x)$ es la elevación y $\Delta_x$ es el recorrido desde P hasta Q.




Podemos decir entonces que $\frac{\Delta_y}{\Delta_x} = \frac{f(x+\Delta_x) - f(x)}{\Delta_x}$ es la pendiente del segmento rectilíneo PQ “[15]

Así, la tasa de cambio promedio de y con respeto a **x** es la pendiente de la recta secante que une los puntos P y Q sobre la gráfica de y = f(x)

http://www.vitutor.com/fun/4/a_2.html

**Ejemplo:** Un fabricante de calzado advierte que el costo por semana de producir **x** docenas de pares zapatos está dado por la función **C(x) = 150.000 +**

[15] ARYA, j. Y LARDNER, R. Matemáticas Aplicadas a la admón. y a la Economía. Santafé de Bogota Prentice Hall 1994, p.480.

**80.500x** y el ingreso obtenido por la venta de **x** docenas está dado por la función **I(x) = 120.000x - 0.02x²**. La fábrica actualmente produce y vende 150 docenas por semana, pero está considerando incrementar la producción a 200 docenas por semana. Calcule los incrementos resultantes en el costo, el ingreso y la utilidad. Determine la tasa de cambio promedio de la utilidad por las docenas extras producidas.

<u>**Solución:**</u> El primer valor de x es 150 y el segundo 200, por tanto

$$\Delta_x = 200 - 150 = 50.$$

Ahora: $\Delta_c = C(x_2) - C(x_1)$

$$\Delta_c = C(200) - C(150) = \left[150.000 + 80.500(200)\right] - \left[150.000 + 80.500(150)\right]$$

$$= 16.250.000 - 12.225.000 = 4.025.000$$

$$\Delta_i = I(x_2) - I(x_1)$$

$$\Delta_i = I(200) - I(150) = \left[120.000(200) - 0{,}02(200)^2\right] - \left[120.000(150) - 0{,}02(150)^2\right]$$

$$= 23.999.200 - 17.999.550$$

$$= 5.999.650$$

Puede observarse entonces que si la producción se incrementa de 150 a 200 docenas, los costos se incrementarían en $4.025.000, mientras que el incremento en los ingresos es de $5.999.650.

Basados en estos datos, se puede decir que el incremento en la utilidad es de $1.974.650 ($\Delta_I - \Delta_C$).

Sin embargo, se puede determinar una expresión que nos dé la utilidad por cada docena producida y vendida, teniendo en cuenta que ésta es igual a los ingresos menos los costos, y a partir de ella, determinar el incremento.

$$U_{(x)} = I_{(x)} - C_{(x)}$$

$$= (120.000\,x - 0{,}02\,x^2) - (150.000 + 80.500\,x)$$

$$= 120.000\,x - 0{,}02\,x^2 - 150.000 - 80.500\,x$$

$$= 39.500x - 0{,}02\,x^2 - 150.000$$

El incremento de la utilidad cuando la producción es de 150 a 200 docenas está dado por:

$\Delta_U = U_{(200)} - U_{(150)}$

$\Delta_U = \left[39.500(200) - 0{,}02(200)^2 - 150.000\right] - \left[39.500(150) - 0{,}02(150)^2 - 150.000\right]$

$= 7.749.200 - 5.774.550$

$\Delta_u = 1.974.650$

La tasa de cambio promedio de la utilidad por docena extra es

$$\frac{\Delta_u}{\Delta_x} = \frac{1.974.650}{50} = 39.493$$

Lo que significa que si la fabrica aumenta su producción de 150 a 200 docenas de zapatos, tendrá un incremento promedio en la utilidad de $39.493 por cada docena extra producida

## 4.4 LA DERIVADA

Si en el cálculo de la tasa de cambio promedio de una función f(x) hacemos a $\Delta_x$ muy pequeño, obtenemos la tasa de cambio instantánea. La cual llamaremos la derivada de la función f(x).

**DEFINICION**: "Dada la función y = f(x), la derivada de **y** con respecto a **x**, denotada por $\frac{dy}{dx}$, se define por:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta_x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta_x \to 0} \frac{f(x+\Delta_x) - f(x)}{\Delta_x}}$$

Siempre y cuando el límite exista."[16]

A la derivada se le llama también coeficiente diferencial y la operación de calcularla se denomina diferenciación.

[16] ARYA, j. Y LARDNER, R. Matemáticas Aplicadas a la admón. y a la Economía. Santafé de Bogota Prentice Hall 1994, p.496

Si la derivada de una función f existe en un punto particular, decimos que f es diferenciable en tal punto.

La derivada de **y = f(x)** con respecto a x puede denominarse también por uno de los siguientes símbolos:

$$y', \quad f'(x), \quad \frac{d}{dx}(y), \quad \frac{df}{dx}, \quad \frac{d}{dx}(f), \quad D_x y, \quad D_x f$$

**Ejemplo:** Calcule la derivada de $y = 3x^2 - 2x + 4$.

**Solución:** Calculemos $\Delta y$, sabiendo que y = f(x)

$\Delta y = f(x + \Delta_x) - f(x)$

$\Delta y = \left[3(x+\Delta_x)^2 - 2(x+\Delta_x) + 4\right] - \left[3x^2 - 2x + 4\right]$

$= 3[x^2 + 2x\Delta_x + (\Delta_x)^2] - 2x - 2\Delta_x + 4 - 3x^2 + 2x - 4$

$= 3x^2 + 6x\Delta_x + 3(\Delta_x)^2 - 2\Delta_x - 3x^2$

$= 6x\Delta_x + 3(\Delta_x)^2 - 2\Delta_x = \Delta_x (6x + 3\Delta_x - 2)$

Dividiendo por $\Delta_x$ se obtiene: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\cancel{\Delta_x}(6x + 3\Delta_x - 2)}{\cancel{\Delta_x}} = 6x + 3\Delta_x - 2$

Luego: $\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta_x \to 0} (6x + 3\Delta_x - 2) = 6x - 2$

**Ejemplo:** Calcule la derivada con respecto a x de la función

$$y = f(x) = x^3 - 1$$

**Solución:** Calculamos $\Delta_y$ y $\frac{\Delta y}{\Delta x}$

$\Delta y = f(x + \Delta_x) - f(x)$

$\Delta y = \left[(x+\Delta_x)^3 - 1\right] - \left[x^3 - 1\right]$

$= x^3 + 3x^2\Delta_x + 3x(\Delta_x)^2 + (\Delta_x)^3 - 1 - x^3 + 1$

$= 3x^2\Delta_x + 3x(\Delta_x)^2 + (\Delta_x)^3$

$= \Delta_x \left[3x^2 + 3x\Delta_x + (\Delta_x)^2\right]$

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x^2 + 3x\Delta_x + (\Delta_x)^2$

Luego:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \underset{\Delta_x \to 0}{Lim} \; [3x^2 + 3x\Delta_x + (\Delta_x)^2] = 3x^2$$

En particular, para x = 2, $f'(2) = 3(2)^2 = 12$.

El procedimiento para calcular la derivada aplicando la definición, es tedioso y complicado cuando la función no es sencilla. Por tanto, utilizaremos en adelante una serie de reglas cuya demostración se realiza con base en la definición y se dejan como inquietud a los alumnos con deseos de profundizar en el tema. Las reglas son:

***Regla 1*.** La derivada de una constante es cero:

Si $f(x) = c$, $f'(x) = 0$

***Regla 2*.** La derivada de la función idéntica es 1:

Si $f(x) = x$, $f'(x) = 1$

***Regla* 3.** La derivada de la n-ésima potencia de una variable es igual al producto de su exponente n y la n-ésima menos una Potencia de la variable.

Si $f(x) = x^n$, $f'(x) = nx^{n-1}$.

***Regla 4*.** La derivada del producto de una constante por una función derivable es igual al producto de la constante por la derivada de la función.

Si $g(x) = c.f(x)$, $g'(x) = c.f'(x)$.

**Ejemplo:**

a) Si y = 8, $\frac{dy}{dx} = 0$ (regla 1)

b) Si $f(x) = -7$, $f'(x) = 0$ (regla 1)

c) Si $f(x) = x^4$, $f'(x) = 4x^3$ (regla 3)

d) Si $f(x) = x^{-3}$, $f'(x) = -3x^{-3-1} = -3x^{-4}$ (regla 3)

e) Si $y = 4x^5$, $\frac{dy}{dx} = (4)(5x^4) = 20x^4$ (regla 4)

Si $f(x) = \frac{4}{x} = 4x^{-1}$, $f'(x) = -4x^{-2} = \frac{-4}{x^2}$ (regla 4)

f) Si f(x) = $\sqrt[3]{x^2}$ = $x^{2/3}$ , $f^{'}(X)= \frac{2}{3}x^{2/3-1} = \frac{2}{3}x^{-1/3} = \frac{2}{3x^{1/3}}$ (regla 4)

***Regla 5***. La derivada de la suma de un número finito de funciones derivables, es igual a la suma de las derivadas de cada función.

Si h(x) = f(x) + g(x), h'(x) = f '(x) + g'(x)

**Ejemplo:**

Si y = $4x^3 - 2x^2 + 4x + 6$,

a) $\frac{dy}{dx} = 4(3x^2) - 2(2x) + 4(1) + 0 = 12x^2 - 4x + 4$.

b) Si f(x) = $3\sqrt[3]{x^4} + 5x^2 + x$, para facilitar el cálculo de la derivada, expresamos los radicales como potencia, quedando $f(x) = 3x^{4/3} + 5x^2 + x$

Luego: $f^{'}(x) = 3(\frac{4}{3}x^{1/3}) + 5(2x) + 1$

$= 4x^{1/3} + 10x + 1$

$= 4\sqrt[3]{x} + 10x + 1$.

***Regla 6***. La derivada del producto de dos funciones derivables, es igual a la derivada de la primera función por la segunda sin derivar, más la derivada de la segunda función por la primera sin derivar. Esto es:

Si h(x) = f(x).g(x), $h^{'}(x) = f^{'}(x)\, g(x) + g^{'}(x) f(x)$.

**Ejemplo:**

a) Si $h(x) = (x^2 - 4x)(x^2 + 5)$, sean $f(x) = x^2 - 4x$ y $g(x) = X^2 + 5$.

$f^{'}(x) = 2x - 4$ y $g'(x) = 2x$

Como $h'(x) = f^{'}(x)g(x) + g^{'}(x)f(x)$, se tiene que

$h'(x) = (2x-4)(x^2 + 5) + (2x)(x^2 - 4x)$

$= 2x^3 + 10x - 4x^2 - 20 + 2x^3 - 8x^2$

$= 4x^3 - 12x^2 + 10x - 20$

b) Si $y = (3 + \sqrt{x})(5 - \sqrt{x})$, sean $f(x) = 3 + x^{1/2}$, de donde $f^{'}(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2}$

$g(x) = 5 - \sqrt{x} = 5 - x^{1/2}$, de donde $g^{'}(x) = -\frac{1}{2}x^{-1/2}$

Luego: $\frac{dy}{dx}$ = $(\frac{1}{2}x^{-1/2})$ $(5 - x^{-1/2})$ + $(-\frac{1}{2}x^{-1/2})$ $(3 + x^{1/2})$

$$= \frac{5}{2}x^{-1/2} - \frac{1}{2}x^{0} - \frac{3}{2}x^{-1/2} - \frac{1}{2}x^{0}$$

$$= x^{-1/2} - 1$$

***Regla 7.*** La derivada del cociente de dos funciones diferenciables es el cociente del producto de la derivada del numerador (dividendo) por el denominador (divisor) sin derivar, menos el producto de la derivada del denominador por el numerador sin derivar, dividido todo entre el cuadrado del denominador.

Si $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ , $\qquad h'(x) = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{[g(x)]^2}$

<u>**Ejemplo:**</u>

a) Si $h(x) = \frac{2x^2 - 3x + 5}{x^2 - 5}$

Se hace $f(x) = 2x^2 - 3x + 5$ y $g(x) = x^2 - 5$, de donde $f'(x) = 4x - 3$ $\quad g'(x) = 2x$

Luego, $\qquad h'(x) = \frac{(4x-3)(x^2-5) - (2x)(2x^2-3x+5)}{(x^2-5)^2}$

$$= \frac{4x^3 - 20x - 3x^2 + 15 - 4x^3 + 6x^2 - 10x}{(x^2-5)^2}$$

$$= \frac{3x^2 - 30x + 15}{(x^2-5)^2}$$

b) si $f(x) = \frac{3x^3 - 2x + 5}{x^3}$ , hacemos

$g(x) = 3x^3 - 2x + 5$, y $h(x) = x^3$ , obteniendo $g'(x) = 9x^2 - 2$ $\quad h'(x) = 3x^2$

Como $f'(x) = \frac{g'(x)h(x) - h'(x)g(x)}{[h(x)]^2}$ , se tiene que

$$f'(x) = \frac{(9x^2-2)(x^3) - (3x^2)(3x^3-2x+5)}{(x^3)^2}$$

$$= \frac{9x^5 - 2x^3 - 9x^5 + 6x^3 - 15x^2}{x^6}$$

$$= \frac{4x^3 - 15x^2}{x^6} = \frac{x^2(4x-15)}{x^6} = \frac{\cancel{x^2}(4x-15)}{\cancel{x^2}x^4}$$

Así: $\quad f'(x) = \dfrac{4x-15}{x^4}$

http://www.vitutor.com/fun/4/b_a.html

http://www.youtube.com/watch?v=ViGui_Xcvo0&list=PLC-j4ScU0ZarxN5aVxeitk3YRZ1QtK98l&index=8

***Regla 8:*** La derivada de la n-énsima potencia de una función derivable es el producto de su exponente **n** por la potencia de exponente **n - 1** de la función, por la derivada de la función dada.

Sí $h(x) = [f(x)]^n$, $\qquad h'(x) = n[f(x)]^{n-1} f'(x)$

**Ejemplo:**

a) Si $h(x) = (2x^3 - 2x)^5$, $\quad h'(x) = 5(2x^3 - 2x)^4 (6x^2 - 2)$

$\qquad = (2x^3 - 2x)^4 (30x - 10)$

b) Si $f(x) = (5 - 2x^2)^4$, $\quad f'(x) = 4(5 - 2x^2)^3 (-4x)$

$\qquad = -16x (5 - 2x^2)^3$

***Regla 9:*** La derivada del logaritmo de una función es igual al producto de la derivada de la función por el logaritmo del número **e**, dividido por la función sin derivar.

Si $h(x) = \log_a f(x)$, $\quad h'(x) = \dfrac{f'(x)\log_a e}{f(x)}$

**Nota:** El número **e** es una constante que se define como $\lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n$ y es aproximadamente igual a 2, 7182.

El número **e** es la base de los logaritmos naturales.

**Ejemplo:**

a) si h(x) = log(4x$^2$ - 2x + 1), hacemos f(x) = 4x$^2$ - 2x + 1 de donde

f ' (x) = 8x -2   y por la Regla 9

h' (x) = $\dfrac{(8x-2)\log e}{4x^2-2x+1}$

b) si h(x) = Log ( $\dfrac{x}{x+2}$ ),

Hacemos f(x) = $\dfrac{x}{x+2}$ , y se obtiene f ' (x) = $\dfrac{1(x+2)-(1)x}{(x+2)^2} = \dfrac{2}{(x+2)^2}$

Luego h'(x) = $\dfrac{\dfrac{2}{(x+2)^2}\log e}{\dfrac{x}{(x+2)}} = \dfrac{2\cancel{(x+2)}\log e}{x\cancel{(x+2)}^2} = \dfrac{2\log e}{x(x+2)}$

**CASO ESPECIAL:** La derivada del logaritmo natural de una función es igual a la derivada de la función dividida por la función.

Si h(x) = Ln[f(x)], h' (x) = $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$, debido a que Ln **e** = 1

**Ejemplo:**

a) Sí f(x) = Ln x$^3$, f'(x) = $\dfrac{3x^2}{x^3} = \dfrac{3}{x}$

b) Si g(x) = Ln(4x + 5). g' (x) = $\dfrac{4}{4x+5}$

**REGLA 10:** La derivada de una función exponencial es igual al producto de la derivada de la función exponente por la función exponencial y por el logaritmo natural de la base de la función exponencial.

Si h(x) =a$^{f(x)}$, h'(x) = f '(x)a$^{f(x)}$Lna

**Ejemplo:**

a) si h(x) = $2^{4x^2-5}$, se hace f(x) = $4x^2$ - 5, de donde f'(x) =8x y por la regla 10
h'(x) = (8x) $2^{4x^2-5}$Ln2

b) Si g(x) = $5^{x^3-x^2+4}$, se hace f(x) =$x^3$ - $x^2$+ 4, de donde f '(x) = $3x^2$ - 2x y por la regla 10 g'(x) = ($3x^2$ -2x) $5^{x^3-x^2+4}$Ln5

**CASO ESPECIAL:** La derivada de la función exponencial de base **e**, es igual al producto de la derivada de la función exponente por la función exponencial.

$$\boxed{\text{Sí } h(x) = e^{f(x)}, \qquad h'(x) = f'(x)e^{f(x)}}$$

**<u>Ejemplo:</u>**

a) Si h(x) = $e^{4x^2+3x+5}$, se hace f(x) = $4x^2$ + 3x + 5, para obtener f'(x) = 8x+3 y por el caso especial de la regla 10, h'(x) = (8x+3) $e^{4x^2+3x+5}$

b) Si g(x) = $e^{x^3}$, entonces g'(x) = $3x^2 e^{x^3}$

c) Si m(x) = $e^x$, entonces m'(x) = $e^x$

## 4.5 DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR.

El resultado de dos o más derivaciones sucesivas de una función, es una derivada de orden superior. Es decir, si y = f(x), es una función diferenciable con respecto a x, podemos obtener su primera derivada y' = f'(x), si y' = f'(x) es diferenciable, podemos obtener la segunda derivada y'' = f''(x); si y'' es diferenciable obtenemos la tercera derivada de la función y ''' = f '''(x). Así podemos continuar hasta obtener la derivada de orden **n**.

La n-ésima derivada de una función f se represen mediante las expresiones:

$$f^{(n)}(x), \quad y^{(n)}, \quad \frac{d^n y}{dx^n}, \quad \frac{d^n}{dx}(y), \quad D^n{}_x y, \quad D^n{}_x(y).$$

**Ejemplo:**

a) Sí $y = 5x^4 - 2x^3 + x - 1$,

$$\frac{dy}{dx} = 20x^3 - 6x^2 + 1$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 60x^2 - 12x$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 120x - 12$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = 120$$

$$\frac{d^5y}{dx^5} = 0.$$

b) Si $f(x) = x^{-1} + 5$,

$f'(x) = -x^{-2}$

$f''(x) = 2x^{-3}$

$f'''(x) = -6x^{-4}$

$f^{(iv)}(x) = 24x^{-5}$

.
.
.

c) Si $g(x) = (x^2 + 1)^2$,

$g'(x) = 2(x^2 + 1)(2x) = 4x(x^2 + 1)$ Regla 8

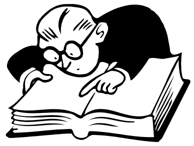
$g''(x) = 4(x^2 + 1) + 4x(2x)$

$= 4x^2 + 4 + 8x^2 = 12x^2 + 4$

$g'''(x) = 24x$

$g^{(iv)}(x) = 24$

$g^{(v)}(x) = 0$



ACTIVIDAD 4.1

Calcula la derivada de las siguientes funciones

**1.** f(x) = $5\sqrt[3]{x^4} - 3\sqrt{x^3} + x^2 - 1$

**2.** f(x) = $xe^x$

**3.** f(x) = Ln $(x^2 - 3)$

**4.** f(x) = $3x^2 - 5x - 6$

**5.** f(x) = $\sqrt[3]{(3x^2 - x)^2}$

**6.** f(x) = $x^2$Ln x

**7.** f(x) = $\dfrac{3x^2 - x}{x^3 - 3}$

**8.** f(x) = $\left(4x^2 + 3x - 8\right)^3$

**9.** f(x) = $2xe^{3x-5}$

**10.** f(x) = $x^3 e^{x^2+2x}$

**11.** f(x) = $4x^2 - 5x + 6$

**12.** g(x) = $\sqrt[5]{x} - 5x^{-2} + x$

**13.** h(x) = $x^2e^{3x}$

**14.** m(x) = x.Ln$x^2$

## 4.6 APLICACIONES EN ADMINISTRACION Y ECONOMIA

En los estudios económicos, la vaciación de una cantidad **y** con respecto a otra cantidad **x** se describe en los conceptos de valor medio y valor marginal.

Un valor medio o promedio, expresa la variación de **y** en el "margen", es decir, para pequeñas variaciones de **x** a partir de un valor dado. El concepto marginal es preciso solo si se considera el límite cuando la variación de **x** tiende a cero.

➢ **Costo marginal**

Supongamos que el costo de producir **x** artículos en una fabrica está dado pro $C(x) = 300 + 0,2x^2$.

El costo de producir 100 artículos es $C(100) = 300 + 0,2\,(100)^2 = 2300$. El costo promedio por artículo cuando se producen 100 unidades es $\frac{2300}{100} = \$23$. Si el fabricante desea cambiar la tasa de producción de 100 a $100 + \Delta_x$ unidades por semana, el costo estará dado por

$$
\begin{aligned}
C + \Delta_c &= 300 + 0,2\,(100 + \Delta_x)^2 \\
&= 300 + 0,2\,\left[10000 + 200\Delta_x + (\Delta_x)^2\right] \\
&= 300 + 2000 + 40\Delta_x + 0,2\,(\Delta_x)^2 \\
&= 2300 + 40\Delta_x + 0,2(\Delta_x)^2
\end{aligned}
$$

Luego el costo extra es:

$$\Delta_c = (C+\Delta_c) - C = \left[2300 + 40\Delta_x + 0,2(\Delta_x)^2\right] - 2300$$

$$\Delta_c = 40\Delta_x + 0,2(\Delta_x)^2$$

El costo promedio por artículo de las unidades extras es:

$$\frac{\Delta_c}{\Delta_x} = \frac{40\Delta_x + 0,2(\Delta_x)^2}{\Delta_x} = 40 + 0,2\Delta_x$$

Por ejemplo, sí la producción pasa de 100 a 120 artículos por semana, $\Delta_x = 20$ y por lo tanto el costo promedio de los 20 artículos adicionales es igual a 40 + 0,2 (20) = 40 + 4 = 44 por unidad.

**DEFINICION: "**El costo marginal es el valor límite del costo promedio por artículo extra cuando esté número de artículos extras tiende a cero, es decir:

$$\text{Costo marginal} = \lim_{\Delta_x \longrightarrow 0} \frac{\Delta_c}{\Delta_x} = \lim_{\Delta_x \longrightarrow 0} \frac{C(x+\Delta_x) - C(x)}{\Delta_x}$$

Que corresponden de a la derivada del costo con respecto a la cantidad producida, o sea que costo marginal es igual a **C'(x).”**[17]

**Ejemplo:** La función de costo para cierto artículo es

$C(x) = 0{,}002x^3 - 0{,}5x^2 + 80x + 50.000.$

Determine el costo marginal y su valor cuando la producción es de 80 unidades. Calcule el costo promedio por artículo.

**Solución:** El costo marginal está dado por la primera derivada de la función de costo $C'(x) = 0{,}006x^2 - x + 80$

Cuando la producción es de 80 unidades, el costo marginal es

$C'(80) = 0{,}003(80)^2 - 80 + 80 = 38.4$

Podemos decir entonces que el costo de producir el artículo número 81 es de $38,4.

El costo promedio por artículo está dado por el costo total dividido por el número de artículos producidos.

| |
|---|
| Costo promedio por artículo = $\overline{C}(x) = \dfrac{C(x)}{x}$ |

Para el ejemplo, $\overline{C}(x) = \dfrac{0{,}002x^3 - 0{,}5x^2 + 80x + 50000}{x}$

$$\overline{C}(50) = \frac{0{,}002(80)^3 + 0{,}5(80)^2 + 80(80) + 50000}{80}$$

$$\overline{C}(80) = \frac{1024 - 3200 + 6400 + 50.000}{80} = 677{,}8$$

El costo promedio por unidad al producir 80 artículos es de $677,8.

- **Ingreso marginal**



[17] ARYA, j. Y LARDNER, R. Matemáticas Aplicadas a la admón. y a la Economía. Santafé de Bogota Prentice Hall 1994, p.511

Sí la función de ingreso para la venta de **x** artículos está dada por $\mathrm{I}(x) = 30x - 0{,}03x^2$, el ingreso obtenido en la venta de 100 unidades es:

$$\mathrm{I}(100) = 30(100) - 0{,}03\,(100)^2$$
$$= 3000 - 300 = 2700.$$

Si las venta se incrementan en $\Delta_x$ artículos, el ingreso será $\mathrm{I} + \Delta_{\mathrm{I}}$

$$\mathrm{I} + \Delta_{\mathrm{I}} = 30(100 + \Delta_x) - 0{,}30(100 + \Delta_x)^2$$
$$= 3000 + 30\Delta_x - 0{,}03[10000+200\Delta_x+(\Delta_x)^2]$$
$$= 3000 + 30\Delta_x - 300 - 6\Delta_x - 0{,}03(\Delta_x)^2$$
$$= 2700 + 24\Delta_x - 0{,}03(\Delta_x)^2$$

El ingreso extra por la venta de $x + \Delta_x$ artículos es

$$\frac{\Delta_{\mathrm{I}}}{\Delta_x} = \frac{24\Delta_x - 0{,}03(\Delta_x)^2}{\Delta_x} = 24 - 0{,}03\Delta_x$$

**<u>DEFINICION</u>:** "El ingreso marginal se define como la derivada de la función de ingreso.

**Ingreso marginal = $\mathrm{I}'(x) = \lim_{\Delta_x \to 0} \frac{\Delta_{\mathrm{I}}}{\Delta_x}$ ",**[18]

El ingreso marginal representa las entradas adicionales de una empresa por artículo adicional vendido cuando ocurre un incremento muy pequeño en el número de artículos vendidos.

**<u>Ejemplo:</u>** Si la ecuación de demanda es $x + 4p = 100$, calcula el ingreso marginal.

**<u>Solución:</u>** El ingreso puede escribirse como $\mathrm{I}(x) = x\,p$, donde **x** es el número de artículos vendidos y **p** el precio por artículo.

Además, como $x + 4p = 100$



---

[18] ARYA, j. Y LARDNER, R. Matemáticas Aplicadas a la admón. y a la Economía. Santafé de Bogota Prentice Hall 1994, p.514

$$P = 25 - \frac{x}{4}$$

Luego: $I(x) = x\left(25 - \frac{x}{4}\right) = 25x - \frac{x^2}{4}$

El ingreso marginal es $I'(x) = 25 - \frac{x}{2}$

- **Utilidad marginal**

Recuerda que utilidad está dada por los ingresos menos los costos. Lo que indica que la utilidad marginal es la diferencia entre el ingreso marginal y el costo marginal.

$$\mathbf{U'(x) = I'(x) - C'(x)}$$

**Ejemplo:** Si la ecuación de demanda es x + 4p = 0 y la función de costo es $C(x) = 100 + 5x$, calcule la utilidad marginal.

**Solución:** El ingreso marginal es $I'(x) = 25 - \frac{x}{2}$, y el costo marginal es

$C'(x) = 5$

Luego, la utilidad marginal estará dada por

$$U'(x) = \left(25 - \frac{x}{2}\right) - (5)$$

$$= 20 - 0{,}5x$$

- **Costo mínimo, Ingreso y utilidad máxima.**

En ocasiones es de suma importancia para una empresa determinar el número de artículos que debe producir para que los costos sean mínimos y los ingresos y las utilidades sean máximas.

**DEFINICIONES:**

Para la producción de x unidades:

- El costo mínimo se obtiene cuando el costo marginal es cero.

- El ingreso máximo se obtiene cuando el ingreso marginal es cero.

- La utilidad máxima se obtiene cuando la utilidad marginal es cero.

**Ejemplo:** Dada las funciones de costo $C(x) = 1200 + 54x - 0{,}09x^2$ y de Ingreso, $I(x) = 10x - 0{,}01x^2$, Determina el número de unidades que minimizan los costos, el número de unidades que maximizan los ingresos y el número de unidades que maximizan la utilidad.

**Solución:**

a) Para determinar el número de utilidades que hacen que el costo sea mínimo, se halla el costo marginal, se iguala a cero y se despeja x.

$$C'(x) = 54 - 0{,}18x$$
$$0 = 54 - 0{,}18x$$
$$x = \frac{54}{0{,}18} = 300$$

Se deben producir 300 unidades para que el costo sea mínimo.

b) Para obtener el número de unidades que hacen máximo el ingreso, se halla el ingreso marginal, se iguala a cero y se despeja x.

$$I'(x) = 10 - 0{,}02x$$
$$0 = 10 - 0{,}02x$$
$$x = \frac{10}{0{,}02} = 500$$

Se debe producir 500 unidades para que el ingreso sea máximo.

d) Para determinar el número de unidades que hace máxima la utilidad, se halla la utilidad marginal, se iguala a cero y se despeja x.

$$
\begin{aligned}
U'(x) &= I'(x) - C(x) \\
&= (10 - 0{,}02x) - (54 - 0{,}18x) \\
&= 10 - 0{,}02x - 54 + 0{,}18x \\
&= -44 + 0{,}16x
\end{aligned}
$$

Sé iguala a cero

$$0 = -44 + 0{,}16x$$

Se despeja x $\quad x = \dfrac{44}{0{,}16} = 275$

Se requiere producir y vender 275 unidades para que la utilidad sea máxima.

**<u>Ejemplo</u>:** Para cierto artículo la ecuación de Demanda es $p = 5 - 0{,}002x$ y la función de costo es $C(x) = 2800 + x$. Encuentre el valor de x que maximizan la utilidad y calcule el precio de venta.

**<u>Solución:</u>** La función de ingreso está dada por:

$$I(x) = xp = x(5 - 0{,}002x) = 5x - 0{,}002x^2$$

La función de utilidad es:

$U(x) = I(x) - C(x) = 5x - 0{,}002x^2 - (2800 + x) = 4x - 0{,}002x^2 – 2800$

La utilidad marginal se obtiene derivando la función de utilidad.

$$U'(x) = 4 - 0{,}004x$$

La utilidad es máxima se obtiene cuando $U'(x) = 0$.

$$0 = 4 - 0{,}004x \text{ de donde } x = 1000$$

Deben producirse y venderse 1000 unidades para obtener máxima utilidad.

El precio de venta es: $p = 5 - 0{,}002(1000) = 5 - 2 = 3$

ACTIVIDAD 4.2

Resuelva los siguientes ejercicios:

1. Para la función de costo C(x) = 100x -10$X^2$ + $\frac{x^3}{3}$, calcule la producción x en la cual el costo es mínimo.
2. Si la ecuación de demanda es $X^{3/4}$+ 4P = 700, calcule el ingreso marginal cuando P = 159.
3. Si la función de costo e ingreso para cierto producto están dadas por C(x) =500x + 0,2$x^2$ y I(x) = 800x - 0,3$x^2$, determina:
   a) El costo marginal para 1.000 unidades.
   b) El ingreso marginal para 1.000 unidades.
   c) La utilidad marginal para 100 unidades.
   d) El número de unidades que hacen máxima la utilidad.
4. Si la función de costo e ingreso para cierto artículo están dadas por C(x) = 120 + 12X y I(x) = 900X - 0,25$X^2$. Calcule el valor de x para el cual la utilidad es máxima. Calcule esta utilidad y el precio de venta del artículo.
5. Un fabricante de aceite comestible advierte que el costo por producir x galones por semana está dado por C(x) = 200.000 + 400x pesos y el ingreso obtenido por la venta de x galones es I(x) = 1500x - 0,05$x^2$. La fábrica actualmente produce 8.000 galones por semana, pero está considerando aumentar la producción a 8.500 galones semanales.

a) Calcule los incrementos resultantes en el costo, en el ingreso y en la utilidad.

*b) Calcule el número de galones que se deben producir para que la utilidad sea máxima.*

6. La función de demanda del producto de una firma es $x = 240000 - 80p$ donde x representa el número de unidades demandadas y p su precio en dólares. Determine el precio que produce ingreso máximo, el valor del ingreso máximo y el número de unidades demandadas.
7. Un gran distribuidor de balones de baloncesto estima que el costo anual de la compra, posesión y almacenamiento del inventario x esta dado por la función

$C = \dfrac{15750.000}{x} + 7x + 300.000$. Determine el tamaño del pedido que minimice el costo anual del inventario y el valor del costo mínimo.

## 4.7 Antiderivada

Sean f y F dos funciones reales definidas en un mismo dominio. La función F es una función antiderivada[19] de f, o simplemente una antiderivada de f, si F tiene por derivada a f.

F es antiderivada de f $\Leftrightarrow$ $F' = f$

La operación que permite obtener una antiderivada F a partir de una función f recibe el nombre de integración.

## 4.8 Integral indefinida.

Una función puede tener varias antiderivadas.

Las primitivas de una función f(x)=2x son:

$F_1(x) = x^2, F_2(x) = x^2 + 3, F_3(x) = x^2 - 2, \ldots\ldots.$

$F_1'(x) = F_2'(x) = F_3'(x) = \ldots.. =$ f(x)

Si F es una antiderivada de f. y C un numero real cualquiera, la función F+ Ces también una antiderivada de f.

Si el dominio de una función es un intervalo, entonces el conjunto de las antiderivadas de f es de la forma:

$\{F + C / C \in R\}$

El conjunto de las antiderivadas de una función f se llama integral indefinida.

La integral indefinida se designa por:

$\int$ se llama símbolo de integración y la notación $\int f(x)dx$ se le llama integración indefinida [20]de f(x) con respecto a x

[19] DIMATE, Sofía y otros. Matemáticas con tecnología aplicada. Editorial Prentice Hall.Pag. 246

$$\int f(x)dx = F(x) + C \; si \; F'(x) = f(x)$$

La función f(x) se denomina integrando y dx es el diferencial de x, C es la constante de integración.

## 4.9 CÁLCULO DE LA INTEGRAL INDEFINIDA

Para calcular las integrales de una función se debe tener en cuenta las siguientes propiedades basicas:

1. $\int x^n = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$
2. $\int dx = x + c$
3. $\int (ax+b)^n = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + c$
4. $\int \frac{dx}{x} = \ln x + c$
5. $\int af(x)dx = a\int f(x)dx$
6. $\int [f(x)+g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

http://www.inetor.com/indefinidas/definicion_integral.html

**Ejemplo:** calcular la integral indefinida $\int (2x^3 + 5x^2 - 3x + 2)dx$

Solución:

$\int (2x^3 + 5x^2 - 3x + 2)dx = \int 2x^3dx + \int 5x^2dx - \int 3xdx + \int 2dx$ Propiedad N°6

$= 2\int x^3dx + 5\int x^2dx - 3\int xdx + 2\int dx$ Propiedad N°5

$= 2\frac{x^4}{4} + 5\frac{x^3}{3} - 3\frac{x^2}{2} + 2x + c$ Propiedad N°1

$= \frac{1}{2}x^4 + \frac{5}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x + c$

**Actividad**

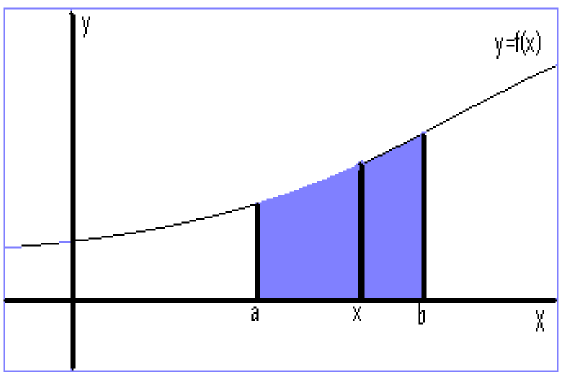


[20] DIMATE, Sofía y otros. Matemáticas con tecnología aplicada. Editorial Prentice Hall.Pag. 246

Calcular las siguientes integrales.

1. $\int x^7 dx$
2. $\int \frac{1}{3x^3} dx$
3. $\int \sqrt[3]{x^2} dx$
4. $\int (5x^3 + 9x^2 - 14x + 1) dx$
5. $\int (x^2 + 1)^2 dx$

## 4.10 INTEGRALES DEFINIDAS




La integral representa el área bajo una curva, dada una función y un par de rectas x=a y x=b entonces el área sombreada representa la integral definida $\int_a^b f(x)dx$, la cual se denomina definida entre a y b siendo "a" el límite inferior de la integral y "b" límite superior de la integra.

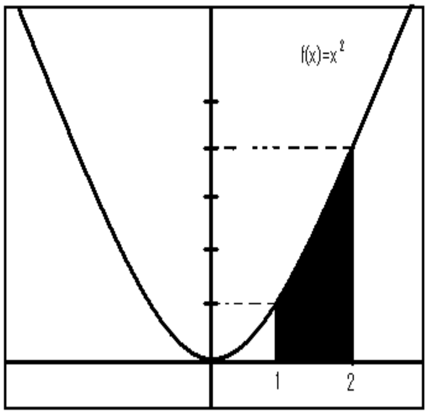
Existe una estrecha relación entre el área y la antiderivada de una función f(x), la cual se concretiza en el teorema fundamental del cálculo.

## 4.11 TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO.

"sea f(x) una función continua no negativa en un intervalo a≤x≤b y sea F(x) una antiderivada de f(x). Entonces el área (A), entre y=f(x) y el eje x sobre las líneas verticales x=a y x=b, está dada por la integral definida"

$$A = \int_a^b f(x)dx = \text{F(b)-F(a)}$$

**Ejemplo:** Halla el área de la región limitada por $f(x)=x^2$ en [1,2]




Solución

La integral definida representa el área bajo la curva

$$\text{Área}= A=\int_a^b f(x)dx$$

$$A=\int_1^2 x^2 dx$$

$$A=\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2$$

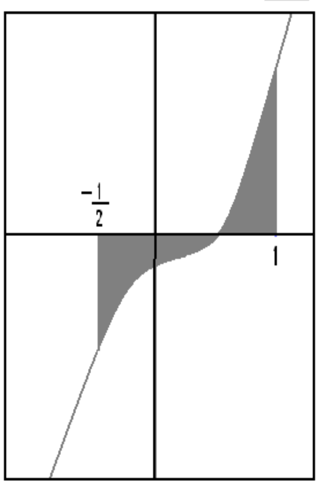
$$A=\frac{2^3}{3}-\frac{1^3}{3}=\frac{8}{3}-\frac{1}{3}=\frac{7}{3}=2{,}333....$$

Luego:

El área de la región limitada por $f(x)=x^2$ en [1,2] es 2,333….unidades cuadradas.

**<u>Ejemplo:</u>** halla el área de la región limitada por $f(x)=x^3+2x-1$ en el eje x el intervalo $\left[\frac{1}{2},1\right]$

Solución:




$$A=\int_{\frac{-1}{2}}^{1}(x^3+2x-1)dx$$

$$A=\int_{\frac{-1}{2}}^{1}x^3dx+\int_{\frac{-1}{2}}^{1}2xdx-\int_{\frac{-1}{2}}^{1}1dx=\left.\frac{x^4}{4}\right|_{-\frac{1}{2}}^{1}+\left.x^2\right|_{-\frac{1}{2}}^{1}-\left.x\right|_{-\frac{1}{2}}^{1}$$

$$A=\frac{1^4+\left(\frac{1}{2}\right)^4}{4}+1^2-\left(-\frac{1}{2}\right)^2-1-\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1+\frac{1}{16}}{4}+1-\frac{1}{4}-1-\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$A=\frac{\frac{15}{16}}{4}+\frac{3}{4}-\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{15}{64}+\frac{3}{4}-\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{15+48-96}{64}=-\frac{33}{64}$$

Como se quiere el area física

$$|A| = \left|-\frac{33}{64}\right| = \frac{33}{64}$$

Luego:

El área de la región limitada por f(x)=$x^3$+2x-1 en el eje x el intervalo $\left[\frac{1}{2},1\right]$ es $\frac{33}{64}$ unidades cuadradas.

**Aplicaciones**

**Ingresos**

A manera de simple ampliación de ese concepto, supóngase que el precio de un producto es constante a un valor de $10 por unidad, esto es, la función de ingreso marginal es

MR=F(x)

MR=10

Donde x es el número de las unidades vendidas. El ingreso total conseguido con la venta de x unidades se determina al integrar la función de ingreso marginal entre 0 y x, Así el ingreso total logrado con la venta de 1500 unidades, se calcularía así:

$$\int_0^{1500} 10dx = 10\Big|_0^{1500} = 10*1500 = 15000$$

Se trata de un procedimiento bastante complejo para el cálculo del ingreso total, puesto que bastaría haber multiplicado el precio por la cantidad vendida y se habría conseguido así el mismo resultado. No obstante, el procedimiento ejemplifica la manera de interpretar como ingreso total o incremental, el área debajo de la función de ingreso marginal, el ingreso adicional relacionado con un incremento de 1500 a 1800 unidades en las ventas se calcula así

$$\int_{1500}^{1800} 10dx = 10x\Big|_{1500}^{1800} = 18000 - 15000 = 3000$$

Gastos de mantenimiento

Un fabricante de automóviles estima que la tasa anual de gastos r(t) para dar mantenimiento a uno de sus modelos, está representada por la función r(t)=100+10$t^2$.

Donde t es la edad del automóvil expresada en años y r(t) se mide en dólares por años. Esta función indica que cuando un automóvil tenga un año de uso, los costos de mantenimiento se harán a una tasa de

$$r(1)=100+10(1)^2=\$110 \text{ por año}$$

Cuando tenga 3 años de uso, estarán realizándose de una taza de

$$r(3)=100+10(3)^2=\$190 \text{ por año}$$

Como se debe suponer, cuando más viejo sea el automóvil, mas mantenimiento requerirá.

El área bajo esta curva está entre dos valores cualesquiera de t es una medida del costo esperado de mantenimiento durante ese intervalo. Los gastos esperados durante los primeros 5 años de vida el automóvil se calculan como sigue

$$\int_0^5 (100+10t^2)dt = 100t^2\Big|_0^5 + \frac{10t^3}{3}\Big|_0^5 = 100*5+\frac{10*5^3}{3} = 500+416,67 = 916,67$$

De estos gastos, los que se esperan hacer durante el quinto año se estiman como

$$\int_4^5 (100+10t^2)dt = 100t^2\Big|_4^5 + \frac{10t^3}{3}\Big|_4^5$$

$$= 916,67 - \left[100*4+\frac{10*4^3}{3}\right]$$

$$= 916,67-(400+213,33) = 303,34$$

**RESUMEN**

- El incremento de una variable **x,** es el cambio en el valor de la variable cuando pasa de un primer valor $\mathbf{x_1}$ a un segundo valor $\mathbf{x_2}$.

  El incremento de **x** está dado por $\Delta_x = x_2 - x_1$ y el incremento de **y** por $\Delta_y = y_2 - y_1 = f(x_2) - f(x_1)$

- La tasa de cambio promedio de una función f sobre un intervalo de x a x + $\Delta_x$ se define como la razón del incremento en y con respecto al incremento en x, o sea $\frac{\Delta_y}{\Delta_x} = \frac{f(x+\Delta_x) - f(x)}{\Delta_x}$

- Dada la función y = f(x), la derivada de **y** con respecto a **x**, denotada por $\frac{dy}{dx}$, se define por $\frac{dy}{dx} = \lim\limits_{\Delta_x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta_x \to 0} \frac{f(x+\Delta_x) - f(x)}{\Delta_x}$ Siempre y cuando el límite exista.

- Reglas para derivar

✓ Si f(x) = c, $f'(x) = 0$

✓ Si f(x) = x, $f'(x) = 1$

✓ Si $f(x) = x^n$, $f'(x) = nx^{n-1}$.

✓ Si g (x) = c.f(x), $g'(x) = c.f'(x)$.

✓ Si h(x) = f(x) + g(x), h'(x) = f '(x) + g'(x)

✓ Si h(x) = f(x).g(x) , $h'(x) = f'(x)\, g(x) + g'(x) f(x)$.

✓ Si h(x) = $\frac{f(x)}{g(x)}$ , h'(x) = $\frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{[g(x)]^2}$

✓ Sí h(x) = $[f(x)]^n$ , h' (x) = n$[f(x)]^{n-1}$ f '(x)

✓ Si h(x) = Ln[f(x)], h' (x) = $\frac{f'(x)}{f(x)}$, debido a que Ln **e** = 1

✓ Sí h(x) = $e^{f(x)}$, h'(x) = f '(x)$e^{f(x)}$



**EVALUACION**

1. La utilidad de una pequeña empresa de calzado esta expresada por: U(x) = $-5x^2 + 400x + 380$. La utilidad máxima de la empresa se obtiene cuando el número de unidades es:

   A. 50 B. 40

   C. 30 D. 25

2. La demanda ***q*** para producir un bien se relaciona con el precio por unidad ***p*** mediante la ecuación 100$p$ + 500$q$ = 200. Cada vez que se incremente en una unidad el precio, sucede que la variación de demanda en unidades

   A. Aumentará en 5 B. Aumentará en 2

   C. Disminuirá en 5 D. Disminuirá en 2

3. Si la función de demanda de un producto está dada por $p = -2q + 20$, la cantidad ***q*** que hace máximo el ingreso es:

   A. 5 B. 10

   C. 20 D. 15

4. “El valor de un activo en función del tiempo está dado por la ecuación $V(t) = 400 + 20e^{-0,5t}$. El valor del activo en el largo plazo tiende a

   A. 420 B. 400

   C. 460 D. 380”[2]

5. “Un estudio de eficiencia del turno de la mañana en una fábrica de Jabones indica que la producción de un trabajador promedio que llega a las 8:00 a.m. estará dada por la función $Q(t) = -3t^3 + 5t^2 + 18t$ unidades t horas después. ¿A qué razón cambia la producción del trabajador, en unidades por hora, a las 10:00 a.m.?

   A. 2 B. 20

   C. 32 D. 30”

**Con la siguiente informa conteste las preguntas 6 a 8**

Una compañía estima que la demanda **x** de su producto fluctúa con su precio **p** y está dada por la ecuación $x = 360000 - 200p$. El costo total de producción de x unidades está dado por $C = 350000 - 300x + 0,001x^2$.

6. ¿Cuántas unidades deben producirse para maximizar las utilidades?

   A. 25000 B. 50.000

   C. 125.000 D. 150.000

7. ¿Qué precio debe fijarse para que la utilidad sea máxima?

A. \$1.175 B. \$1.765

C. \$1.575 D. \$1.265

8. La utilidad máxima para este producto es:

A. \$93.400.000 B. \$39.400.000

C. \$94.300.000 D. \$49.300.000

**GLOSARIO**

Para el glosario el estudiante puede hacer uso interactivo de un documento completo del cual se da el sitio web.

Este diccionario ilustrado de conceptos matemáticos de distribución gratuita incluye más de mil definiciones y más de trescientas ilustraciones para que el lector pueda crear una idea más clara del concepto para entenderlo de una manera más sencilla y amena. (SOTO, 2001)

SOTO EFRAIN DICCIONARIO ILUSTRADO DE CONCEPTOS MATEMATICOS.
http://www.aprendematematicas.org.mx/obras/DICM.pdf



**BIBLIOGRAFIA**

ARYA, Jagdish y LARDNER; Robin. Matemáticas Aplicadas a la Administración y a la Economía. Santafé de Bogotá: Prentice Hall, 1994.

BUDNICK, Frank. Matemáticas Aplicadas para Administración , Economía y Ciencias Sociales. México: McGraww Hill, 1999.

GRUPO AZARQUIEL (1991): *"Iniciación al álgebra" Matemáticas: cultura y* *aprendizaje* ., vol. 33. Síntesis, Madrid.

HAEUSSLER, Ernest y PAUL, Richard. Matemáticas Aplicadas para Administración, Economía, Ciencias Sociales y de la Vida. México: Prentice Hall, 1997.

KLEIMAN, Ariel y Elena. Matrices. México: Limusa, 1995

LARSON – HOSTETLER. Calculo. Bogotá: McGrawHill , 1994

LEITHOLD, Louis. Calculo con Geometría Analítica. México: Harla, 1992.

SANCHEZ, Ruben y VELASCO, Antonio. Curso básico de Álgebra Lineal. Santafé de Bogotá: Editorial Trillas, 1994.

SOCAS, M.; CAMACHO, M.; PALAREA, M. y HENÁNDEZ, J. (1989): "Iniciación al álgebra". Matemáticas: cultura y aprendizaje, vol. 23. Síntesis, Madrid

WEBER, Jean E. Matemáticas para Administración y Economía. México: Harla, 1982

BIBLIOGRAFIA:

MATEMATICAS APLICADAS A LA ADMINISTRACION Y ECONOMIA, ARYA Jagdish, LARDNER Robin. Tercera edición Prentice Hall.

MATEMATICAS APLICADAS PARA ADMINISTRACION, ECONOMIA Y CIENCIAS SOCIALES. Tercera edición. Mc Graw Hill. BUDNICK, Frank. 1990.

MATEMATICAS PARA ADMINISTRACION Y ECONOMIA, Cuarta edición. Harla. México. WEBER, Jean. 1984.

LA CONTABILIDAD NACIONAL TEORÍA Y MÉTODOS, PATRICIO León, MARCONI Salvador, 1999, tercera edición. Editorial Abya Yala

GONZALEZ Pareja Alfonso, CALDERON Susana, HIDALGO Ramon, ROMERO Carlos. EL MODELO INPUT-OUTPUT DE LEONTIEF: una experiencia docente con Mathematica. Facultad de ciencias económicas y empresariales. De Malaga. Asociación Española de Profesores Universitarios.

MODULO DE MATEMATICAS APLICADAS A LA ADMINISTRACION A LA ADMINISTRACION. PROGRAMAS A DISTANCIA CECAR

## CIBERGRAFIA

### UNIDAD 1

**MATRICES**

http://www.youtube.com/watch?v=wDdYQY_blE4

**MULTIPLICACION DE UNA MATRIZ POR UN ESCALAR**

http://www.youtube.com/watch?v=QOHguc4QvL8

**MULTIPLICACION DE MATRICES**

**http://www.youtube.com/watch?v=pmZkO5-S6xY**

http://www.vitutor.com/algebra/matrices/operaciones.html#

**DETERMINANTES**

http://www.mty.itesm.mx/etie/deptos/m/ma95-843/lecturas/l843-61.pdf

http://docencia.udea.edu.co/GeometriaVectorial/uni2/seccion21/ejemplos21.html#ej01
**S6xY**

http://www.youtube.com/watch?v=Y5VFvr8gqMM

http://www.dcb.unam.mx/users/casianoam/algebra/capitulos/T06.pdf
http://www.uv.es/~perezsa/docencia/material/IMEE/Matrices.pdf

### UNIDAD 2

**SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES**

http://eco-mat.ccee.uma.es/Libro/MATRICES/Matrices5.htm
http://docencia.udea.edu.co/GeometriaVectorial/uni1/seccion11/ejemplos11.html#ej01

**Teoría de Juegos.**

Para abordar esta temática el estudiante y tutor pueden visitar los siguientes sitios web

http://www.monografias.com/trabajos5/teorideju/teorideju.shtml http://www.elblogsalmon.com/conceptos-de-economia/que-es-la-teoria-de-juegos

http://www.ecpunr.com.ar/Docs/Teoria_de_Juegos%20II.pdf

http://search.proquest.com/docview/334342975?accountid=34487

http://search.proquest.com/docview/467248267?accountid=34487

http://search.proquest.com/docview/928099069?accountid=34487

http://search.proquest.com/docview/1020166523?accountid=34487

http://search.proquest.com/docview/925803692?accountid=34487

**UNIDAD 3**

**LÍMITE Y CONTINUIDAD**

http://www.youtube.com/watch?v=Uf9QXgiqfdo

http://www.youtube.com/watch?v=KsFyrL1a2j4

http://www.youtube.com/watch?v=8V63b4WxAKY

**“LÍMITES AL INFINITO Y LÍMITES INFINITOS**

**http://www.youtube.com/watch?v=FOhTPFwwgjU**

**UNIDAD 4**

**TOPICOS DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL**

**INCREMENTOS Y TASAS**

http://www.vitutor.com/fun/4/a_2.html

**LA DERIVADA**

**http://www.vitutor.com/fun/4/b_a.html**

**http://www.youtube.com/watch?v=ViGui_Xcvo0&list=PLC-j4ScU0ZarxN5aVxeitk3YRZ1QtK98l&index=8**

**ANTIDERIVADA**

http://www.inetor.com/indefinidas/definicion_integral.html

**GLOSARIO**

SOTO EFRAIN DICCIONARIO ILUSTRADO DE CONCEPTOS MATEMATICOS.
http://www.aprendematematicas.org.mx/obras/DICM.pdf

DIRECCIÓN DE EDUCACIÓN ABIERTA Y A DISTANCIA Y VIRTUALIDAD

PROGRAMA ADMINISTRACIÓN DE EMPRESAS

# MATEMATICAS APLICADAS

Carretera Troncal de Occidente - Vía Corozal - Sincelejo (Sucre)
Teléfonos: 2804017 - 2804018 - 2804032, Ext. 126, 122 y 123
Mercadeo: 2806665 Celular: (314) 524 88 16
E- Mail: facultadeducacion@cecar.edu.co

CECAR
Corporación Universitaria del Caribe